Computer-Mathematik: Abstieg oder Aufstieg?

Bruno Buchberger
Research Institute for Symbolic Computation
Johannes Kepler Universität, Linz, Österreich

Vortrag am 23. Mai 2002
am Institut für Wissenschaftliches Rechnen (IWR) in Heidelberg

Copyright Bruno Buchberger: Copying is permitted under the condition that
- the file is kept unchanged
- in particular, the copyright note is included, and
- a note is sent to buchberger@risc.uni-linz.ac.at

- Computer-Mathematik: Mathematik auf Knopfdruck
- Mathematik als Trauma
- Die Überwindung des Schultraumas

```
N[Sqrt[2]]
```

```
1.41421
```

"Numerisch" rechnen! Am Taschenrechner.

```
N[Sqrt[2], 200]
```

```
1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247846210703885038753432764157·.
273501384623091229702492483605585073721264412149709993583141322266592750559275579995050115278206057·.
715
```

"Numerisch" rechnen! In einem mathematischen Software-System.

```
3/17 + 15/7
```

$$\frac{276}{119}$$

"Algebraisch" rechnen? In einem mathematischen Software-System mit "Computer-Algebra".

```
Simplify[Sqrt[2] + 3/Sqrt[2]]
```

$$\frac{5}{\sqrt{2}}$$

```
D[Sin[Sqrt[x - E^x]] x^2, x]
```

$$\frac{(1 - e^x)\, x^2 \cos\left[\sqrt{-e^x + x}\right]}{2\sqrt{-e^x + x}} + 2\, x \sin\left[\sqrt{-e^x + x}\right]$$

"Symbolisch" rechnen? In einem mathematischen Software-System.

In mathematischen Software-Systeme wie Mathematica, Derive, Maple, Magma, Macsyma etc. kann man heute numerisch, algebraisch, symbolisch, graphisch rechnen.

Symbolic Computation ⊇ Algebraic Computation ⊇ Numeric Computation.

■ Die Überwindung des Universitätstraumas

```
DSolve[{y[x] == -z'[x], z[x] == -y'[x]}, {y, z}, x]
```

$$\left\{\left\{y \to \left(\frac{1}{2}\, e^{-\#1}\,(C[1] + e^{2\#1}\, C[1] + C[2] - e^{2\#1}\, C[2])\ \&\right),\ z \to \left(-\frac{1}{2}\, e^{-\#1}\,(-C[1] + e^{2\#1}\, C[1] - C[2] - e^{2\#1}\, C[2])\ \&\right)\right\}\right\}$$

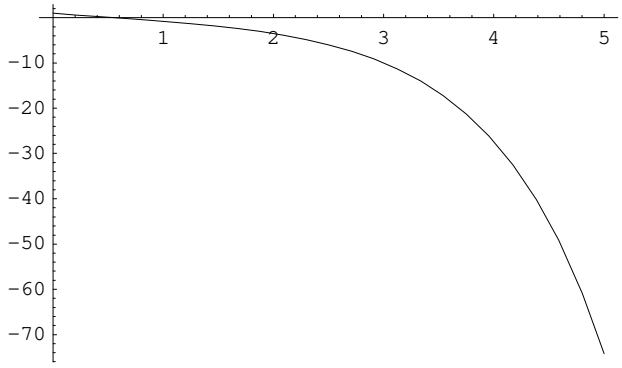
Symbolisch rechnen.

```
sol=DSolve[{y[x] == -z'[x], z[x] == -y'[x],y[0]==1,z[0]==2}, {y, z}, x]
```

$$\left\{\left\{y \to \left(-\frac{1}{2}\, e^{-\#1}\,(-3 + e^{2\#1})\ \&\right),\ z \to \left(\frac{1}{2}\, e^{-\#1}\,(3 + e^{2\#1})\ \&\right)\right\}\right\}$$

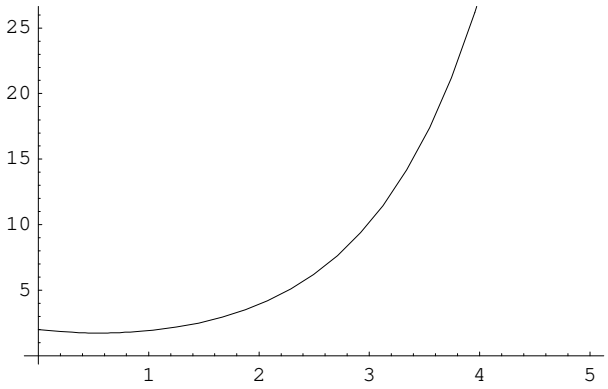
Numerisch auswerten:

```
Plot[(y /. sol[[1, 1]])[x], {x, 0, 5}]
```



- Graphics -

```
Plot[(z /. sol[[1, 2]])[x], {x, 0, 5}]
```



- Graphics -

Packages verwenden, z.B. für Wavelet-Transformationen: siehe Bilder.

Woher kommen gute Wavelet-Funktionen?

> F. Chazak, P. Paule, O. Scherzer, A. Schoisswohl, B. Zimmermann.
> The Construction of Orthonormal Wavelets Using Symbolic Methods and a Matrix Analytic Approach for Wavelets on the Interval. Erscheint n Experimental *Mathematics*.

Algebraisch rechnen mit "Gröbner Basen": N algebraische Gleichungen in N Unbekannten $Q_0, \ldots, Q_{N-1}$:

```
Clear[W]
W[N_, 0] := Sum[Q_j / 2^j, {j, 0, N-1}] - 1 / 2^(2 N-2);
W[N_, l_] := Sum[Sum[Binomial[4 N - i - j - 2, 2 N + 2 l - i - 1] Q_i Q_j, {j, 0, N-1}], {i, 0, N-1}]
```

```
Table[W[1, l], {l, 0, 0}]
```

$$\{-1 + Q_0\}$$

```
Table[W[2, l], {l, 0, 1}]
```

$$\left\{-\frac{1}{4} + Q_0 + \frac{Q_1}{2},\ 6\,Q_0^2 + 6\,Q_0\,Q_1 + Q_1^2\right\}$$

```
W3 = Table[W[3, l], {l, 0, 2}]
```

$$\left\{-\frac{1}{16} + Q_0 + \frac{Q_1}{2} + \frac{Q_2}{4},\ 120\,Q_0^2 + 120\,Q_0\,Q_1 + 28\,Q_1^2 + 64\,Q_0\,Q_2 + 28\,Q_1\,Q_2 + 6\,Q_2^2,\right.$$
$$\left.10\,Q_0^2 + 10\,Q_0\,Q_1 + Q_1^2 + 8\,Q_0\,Q_2 + Q_1\,Q_2\right\}$$

```
GroebnerBasis[W3, {Q_2, Q_1, Q_0}]
```

$$\{-9 + 96\,Q_0 + 1536\,Q_0^2 + 4096\,Q_0^3 - 16384\,Q_0^4,\ -21\,Q_0 - 32\,Q_0^2 + 128\,Q_0^3 - 3\,Q_1,\ 3 + 120\,Q_0 + 256\,Q_0^2 - 1024\,Q_0^3 - 12\,Q_2\}$$

```
Solve[-9 + 96 Q_0 + 1536 Q_0^2 + 4096 Q_0^3 - 16384 Q_0^4 == 0, Q_0]
```

$$\left\{\left\{Q_0 \to \frac{1}{16} - \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{8} - \frac{1}{2}\,i\,\sqrt{-\frac{5}{64} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{16}}\right\},\ \left\{Q_0 \to \frac{1}{16} - \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{8} + \frac{1}{2}\,i\,\sqrt{-\frac{5}{64} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{16}}\right\},\right.$$
$$\left\{Q_0 \to \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{8} - \frac{1}{2}\,\sqrt{\frac{5}{64} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{16}}\right\},\ \left.\left\{Q_0 \to \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{8} + \frac{1}{2}\,\sqrt{\frac{5}{64} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{16}}\right\}\right\}$$

```
N[%]
```

$$\{\{Q_0 \to -0.135142 - 0.0719308\,i\},\ \{Q_0 \to -0.135142 + 0.0719308\,i\},\ \{Q_0 \to 0.0498175\},\ \{Q_0 \to 0.470467\}\}$$

```
W5 = Table[W[5, l], {l, 0, 4}]
```

$$\left\{-\frac{1}{256}+Q_0+\frac{Q_1}{2}+\frac{Q_2}{4}+\frac{Q_3}{8}+\frac{Q_4}{16},\ 31824\,Q_0^2+31824\,Q_0\,Q_1+8008\,Q_1^2+15808\,Q_0\,Q_2+8008\,Q_1\,Q_2+2002\,Q_2^2+7800\,Q_0\,Q_3+4004\,Q_1\,Q_3+2002\,Q_2\,Q_3+495\,Q_3^2+3796\,Q_0\,Q_4+2002\,Q_1\,Q_4+1012\,Q_2\,Q_4+495\,Q_3\,Q_4+120\,Q_4^2,\ 8568\,Q_0^2+8568\,Q_0\,Q_1+1820\,Q_1^2+4928\,Q_0\,Q_2+1820\,Q_1\,Q_2+364\,Q_2^2+3108\,Q_0\,Q_3+1092\,Q_1\,Q_3+364\,Q_2\,Q_3+66\,Q_3^2+2016\,Q_0\,Q_4+728\,Q_1\,Q_4+232\,Q_2\,Q_4+66\,Q_3\,Q_4+10\,Q_4^2,\ 816\,Q_0^2+816\,Q_0\,Q_1+120\,Q_1^2+576\,Q_0\,Q_2+120\,Q_1\,Q_2+14\,Q_2^2+456\,Q_0\,Q_3+92\,Q_1\,Q_3+14\,Q_2\,Q_3+Q_3^2+364\,Q_0\,Q_4+78\,Q_1\,Q_4+12\,Q_2\,Q_4+Q_3\,Q_4,\ 18\,Q_0^2+18\,Q_0\,Q_1+Q_1^2+16\,Q_0\,Q_2+Q_1\,Q_2+15\,Q_0\,Q_3+Q_1\,Q_3+14\,Q_0\,Q_4+Q_1\,Q_4\right\}$$

```
GroebnerBasis[W5, {Q4, Q3, Q2, Q1, Q0}] // Timing
```

$$\{0.28\ \text{Second}, \{-2251875390625 + 131766880000000\,Q_0 + 57826836480000000\,Q_0^2 + 4000515620864000000\,Q_0^3 - 92455465857843200000\,Q_0^4 - 151366838346212966400000\,Q_0^5 + 32198063323420295168000 0\,Q_0^6 + 260040634716141408747520 00\,Q_0^7 - 151806990362953297113907200 0\,Q_0^8 + 24345747195367204805253529600\,Q_0^9 + 28222373258903518083515678720 0\,Q_0^{10} - 12421567725441961014604993658880\,Q_0^{11} - 71032999454195120173711747973120\,Q_0^{12} + 28775668625180807413975162762035 20\,Q_0^{13} + 38942226439011207213978722469150720\,Q_0^{14} + 83076749736557242056487941267521536\,Q_0^{15} - 13292279957849158729038070602803445 76\,Q_0^{16},$$

$$-1017322989596484375 + 770491616196022000000 0\,Q_0 + 79194408634955264000000\,Q_0^2 - 54411839119976038400000 00\,Q_0^3 - 14561833368977607229440000 0\,Q_0^4 + 82429296702022106061209600 00\,Q_0^5 + 16840684587417469006852915 2000\,Q_0^6 - 17649128777477534740786446336000\,Q_0^7 + 34093353698388367192136613888000 0\,Q_0^8 + 30245818831910180721277406281728000\,Q_0^9 - 16250737744182968459600999206617088 0\,Q_0^{10} - 90266196884798715540149739173445632 0\,Q_0^{11} + 35216824630754427496300799427073802240\,Q_0^{12} + 47117595927239485974349929746918277120 0\,Q_0^{13} + 95453088246151253540182808370599270809 6\,Q_0^{14} - 15855280763971686203722780078847752667136\,Q_0^{15} + 605314156930560000000\,Q_1,$$

$$8941207316089453125 - 380390824176972000000 00\,Q_0 - 85217196039855667200000 0\,Q_0^2 + 47683069079045773721600000\,Q_0^3 + 22130450806879643762688000 00\,Q_0^4 - 98534422909480576651100160000\,Q_0^5 - 23360769537973329615556444160000\,Q_0^6 + 22315256910968274236469569126400 0\,Q_0^7 - 42566749812936610428164096655360 00\,Q_0^8 - 37013636891048134858979327292211200\,Q_0^9 + 20398988811865107094224737537517158 40\,Q_0^{10} + 10262261839721027208816513395730677760\,Q_0^{11} - 46396014290109739774510042890069082112 0\,Q_0^{12} - 60736513665329267978378843521299146342 40\,Q_0^{13} - 11991491104949279875032564572491798806528\,Q_0^{14} + 20445747839768087324520037933441339935948 8\,Q_0^{15} + 605314156930560000000\,Q_2,$$

$$-68958263573825390625 + 300529071721983370000000\,Q_0 + 11027658719776864256000000\,Q_0^2 - 46027167089885303275520000 0\,Q_0^3 - 34880170188893135862497280000\,Q_0^4 + 11562178409763258240283443200 00\,Q_0^5 + 46534310671548030547623149568000\,Q_0^6 - 34362060077258350616112047063040 00\,Q_0^7 + 60807244831229197412695700353843200\,Q_0^8 + 59814741898468063195581192905687040 0\,Q_0^9 - 29919934701646299078929780434083512320\,Q_0^{10} - 15701955671531604955023955323999223808 0\,Q_0^{11} + 69004347983690272806541783246924724613120\,Q_0^{12} + 91362552223871199937305664129257449717760\,Q_0^{13} + 18600843425355188583444084389612882388582 4\,Q_0^{14} - 30940896928086069253064951340517587717990 4\,Q_0^{15} + 211859954925696000000 0\,Q_3,$$

$$-32382032456484375 - 88903071499638046875\,Q_0 - 43829380098553560000000\,Q_0^2 + 14393946172833740800000 0\,Q_0^3 + 15218402908902166364160000\,Q_0^4 - 41326555113124484087808000 0\,Q_0^5 - 23110417498015018094952448000\,Q_0^6 + 15065524338371742552765235200 00\,Q_0^7 - 25414481164735753920369288806400\,Q_0^8 - 27087791698296728760848366960640 0\,Q_0^9 + 12724251290856775353207815374110720\,Q_0^{10} + 69475135938310141522830200961761280\,Q_0^{11} - 29444242492130024725757716721355980 80\,Q_0^{12} - 39377454607922045730716948742128271360\,Q_0^{13} - 81982548915744390770481878594154921984\,Q_0^{14} + 13386798826139520024447524146411460362 24\,Q_0^{15} + 752343589935000000\,Q_4\}\}$$

```
Solve[-2251875390625 + 131766880000000 Q0 + 57826836480000000 Q0^2 +
    4000515620864000000 Q0^3 - 924554658578432000000 Q0^4 - 151366838346212966400000 Q0^5 +
    32198063323420295168000000 Q0^6 + 2600406347161414087475200000 Q0^7 -
    151806990362953297113907200000 Q0^8 +
    24345747195367204805253529600000 Q0^9 + 2822237325890351808351567872000000 Q0^10 -
    124215677254419610146049936588800000 Q0^11 - 7103299945419512017371174797312000000 Q0^12 +
    2877566862518080741397516276203520000000 Q0^13 + 389422264390112072139787224691507200000 Q0^14 +
    83076749736557242056487941267521536000000 Q0^15 - 13292279957849158729038070602803445760000000 Q0^16 == 0, Q0]
```

```
{{Q0 → Root[2251875390625 - 131766880000000 #1 - 57826836480000000 #1^2 - 4000515620864000000 #1^3 +
      924554658578432000000 #1^4 + 151366838346212966400000 #1^5 - 32198063323420295168000000 #1^6 -
      2600406347161414087475200000 #1^7 + 151806990362953297113907200000 #1^8 -
      24345747195367204805253529600000 #1^9 - 2822237325890351808351567872000000 #1^10 +
      124215677254419610146049936588800000 #1^11 + 7103299945419512017371174797312000000 #1^12 -
      2877566862518080741397516276203520000000 #1^13 - 389422264390112072139787224691507200000 #1^14 -
      83076749736557242056487941267521536000000 #1^15 + 13292279957849158729038070602803445760000000 #1^16 &, 1]},
 {Q0 → Root[2251875390625 - 131766880000000 #1 - 57826836480000000 #1^2 - 4000515620864000000 #1^3 +
      924554658578432000000 #1^4 + 151366838346212966400000 #1^5 - 32198063323420295168000000 #1^6 -
      2600406347161414087475200000 #1^7 + 151806990362953297113907200000 #1^8 -
      24345747195367204805253529600000 #1^9 - 2822237325890351808351567872000000 #1^10 +
      124215677254419610146049936588800000 #1^11 + 7103299945419512017371174797312000000 #1^12 -
      2877566862518080741397516276203520000000 #1^13 - 389422264390112072139787224691507200000 #1^14 -
      83076749736557242056487941267521536000000 #1^15 + 13292279957849158729038070602803445760000000 #1^16 &, 2]},
 {Q0 → Root[2251875390625 - 131766880000000 #1 - 57826836480000000 #1^2 - 4000515620864000000 #1^3 +
      924554658578432000000 #1^4 + 151366838346212966400000 #1^5 - 32198063323420295168000000 #1^6 -
      2600406347161414087475200000 #1^7 + 151806990362953297113907200000 #1^8 -
      24345747195367204805253529600000 #1^9 - 2822237325890351808351567872000000 #1^10 +
      124215677254419610146049936588800000 #1^11 + 7103299945419512017371174797312000000 #1^12 -
      2877566862518080741397516276203520000000 #1^13 - 389422264390112072139787224691507200000 #1^14 -
      83076749736557242056487941267521536000000 #1^15 + 13292279957849158729038070602803445760000000 #1^16 &, 3]},
 {Q0 → Root[2251875390625 - 131766880000000 #1 - 57826836480000000 #1^2 - 4000515620864000000 #1^3 +
      924554658578432000000 #1^4 + 151366838346212966400000 #1^5 - 32198063323420295168000000 #1^6 -
      2600406347161414087475200000 #1^7 + 151806990362953297113907200000 #1^8 -
      24345747195367204805253529600000 #1^9 - 2822237325890351808351567872000000 #1^10 +
      124215677254419610146049936588800000 #1^11 + 7103299945419512017371174797312000000 #1^12 -
      2877566862518080741397516276203520000000 #1^13 - 389422264390112072139787224691507200000 #1^14 -
      83076749736557242056487941267521536000000 #1^15 + 13292279957849158729038070602803445760000000 #1^16 &, 4]},
 {Q0 → Root[2251875390625 - 131766880000000 #1 - 57826836480000000 #1^2 - 4000515620864000000 #1^3 +
      924554658578432000000 #1^4 + 151366838346212966400000 #1^5 - 32198063323420295168000000 #1^6 -
      2600406347161414087475200000 #1^7 + 151806990362953297113907200000 #1^8 -
      24345747195367204805253529600000 #1^9 - 2822237325890351808351567872000000 #1^10 +
      124215677254419610146049936588800000 #1^11 + 7103299945419512017371174797312000000 #1^12 -
      2877566862518080741397516276203520000000 #1^13 - 389422264390112072139787224691507200000 #1^14 -
      83076749736557242056487941267521536000000 #1^15 + 13292279957849158729038070602803445760000000 #1^16 &, 5]},
 {Q0 → Root[2251875390625 - 131766880000000 #1 - 57826836480000000 #1^2 - 4000515620864000000 #1^3 +
      924554658578432000000 #1^4 + 151366838346212966400000 #1^5 - 32198063323420295168000000 #1^6 -
      2600406347161414087475200000 #1^7 + 151806990362953297113907200000 #1^8 -
      24345747195367204805253529600000 #1^9 - 2822237325890351808351567872000000 #1^10 +
      124215677254419610146049936588800000 #1^11 + 7103299945419512017371174797312000000 #1^12 -
      2877566862518080741397516276203520000000 #1^13 - 389422264390112072139787224691507200000 #1^14 -
      83076749736557242056487941267521536000000 #1^15 + 13292279957849158729038070602803445760000000 #1^16 &, 6]},
```

$$\{Q_0 \to \text{Root}[2251875390625 - 131766880000000\,\#1 - 57826836480000000\,\#1^2 - 4000515620864000000\,\#1^3 + 92455465857843200000\,\#1^4 + 1513668383462129664000\,\#1^5 - 321980633234202951680000\,\#1^6 - 26004063471614140874752000\,\#1^7 + 1518069903629532971139072000\,\#1^8 - 24345747195367204805253529600\,\#1^9 - 282223732589035180835156787200\,\#1^{10} + 1242156772544196101460499365888 0\,\#1^{11} + 710329994541951201737117479731 20\,\#1^{12} - 28775668625180807413975162762035 20\,\#1^{13} - 38942226439011207213978722469150720\,\#1^{14} - 83076749736557242056487941267521536\,\#1^{15} + 13292279957849158729038070602803445 76\,\#1^{16} \&, 7]\},$$

$$\{Q_0 \to \text{Root}[2251875390625 - 131766880000000\,\#1 - 57826836480000000\,\#1^2 - 4000515620864000000\,\#1^3 + 92455465857843200000\,\#1^4 + 1513668383462129664000\,\#1^5 - 321980633234202951680000\,\#1^6 - 26004063471614140874752000\,\#1^7 + 1518069903629532971139072000\,\#1^8 - 24345747195367204805253529600\,\#1^9 - 282223732589035180835156787200\,\#1^{10} + 1242156772544196101460499365888 0\,\#1^{11} + 710329994541951201737117479731 20\,\#1^{12} - 28775668625180807413975162762035 20\,\#1^{13} - 38942226439011207213978722469150720\,\#1^{14} - 83076749736557242056487941267521536\,\#1^{15} + 13292279957849158729038070602803445 76\,\#1^{16} \&, 8]\},$$

$$\{Q_0 \to \text{Root}[2251875390625 - 131766880000000\,\#1 - 57826836480000000\,\#1^2 - 4000515620864000000\,\#1^3 + 92455465857843200000\,\#1^4 + 1513668383462129664000\,\#1^5 - 321980633234202951680000\,\#1^6 - 26004063471614140874752000\,\#1^7 + 1518069903629532971139072000\,\#1^8 - 24345747195367204805253529600\,\#1^9 - 282223732589035180835156787200\,\#1^{10} + 1242156772544196101460499365888 0\,\#1^{11} + 710329994541951201737117479731 20\,\#1^{12} - 28775668625180807413975162762035 20\,\#1^{13} - 38942226439011207213978722469150720\,\#1^{14} - 83076749736557242056487941267521536\,\#1^{15} + 13292279957849158729038070602803445 76\,\#1^{16} \&, 9]\},$$

$$\{Q_0 \to \text{Root}[2251875390625 - 131766880000000\,\#1 - 57826836480000000\,\#1^2 - 4000515620864000000\,\#1^3 + 92455465857843200000\,\#1^4 + 1513668383462129664000\,\#1^5 - 321980633234202951680000\,\#1^6 - 26004063471614140874752000\,\#1^7 + 1518069903629532971139072000\,\#1^8 - 24345747195367204805253529600\,\#1^9 - 282223732589035180835156787200\,\#1^{10} + 1242156772544196101460499365888 0\,\#1^{11} + 710329994541951201737117479731 20\,\#1^{12} - 28775668625180807413975162762035 20\,\#1^{13} - 38942226439011207213978722469150720\,\#1^{14} - 83076749736557242056487941267521536\,\#1^{15} + 13292279957849158729038070602803445 76\,\#1^{16} \&, 10]\},$$

$$\{Q_0 \to \text{Root}[2251875390625 - 131766880000000\,\#1 - 57826836480000000\,\#1^2 - 4000515620864000000\,\#1^3 + 92455465857843200000\,\#1^4 + 1513668383462129664000\,\#1^5 - 321980633234202951680000\,\#1^6 - 26004063471614140874752000\,\#1^7 + 1518069903629532971139072000\,\#1^8 - 24345747195367204805253529600\,\#1^9 - 282223732589035180835156787200\,\#1^{10} + 1242156772544196101460499365888 0\,\#1^{11} + 710329994541951201737117479731 20\,\#1^{12} - 28775668625180807413975162762035 20\,\#1^{13} - 38942226439011207213978722469150720\,\#1^{14} - 83076749736557242056487941267521536\,\#1^{15} + 13292279957849158729038070602803445 76\,\#1^{16} \&, 11]\},$$

$$\{Q_0 \to \text{Root}[2251875390625 - 131766880000000\,\#1 - 57826836480000000\,\#1^2 - 4000515620864000000\,\#1^3 + 92455465857843200000\,\#1^4 + 1513668383462129664000\,\#1^5 - 321980633234202951680000\,\#1^6 - 26004063471614140874752000\,\#1^7 + 1518069903629532971139072000\,\#1^8 - 24345747195367204805253529600\,\#1^9 - 282223732589035180835156787200\,\#1^{10} + 1242156772544196101460499365888 0\,\#1^{11} + 710329994541951201737117479731 20\,\#1^{12} - 28775668625180807413975162762035 20\,\#1^{13} - 38942226439011207213978722469150720\,\#1^{14} - 83076749736557242056487941267521536\,\#1^{15} + 13292279957849158729038070602803445 76\,\#1^{16} \&, 12]\},$$

$$\{Q_0 \to \text{Root}[2251875390625 - 131766880000000\,\#1 - 57826836480000000\,\#1^2 - 4000515620864000000\,\#1^3 + 92455465857843200000\,\#1^4 + 1513668383462129664000\,\#1^5 - 321980633234202951680000\,\#1^6 - 26004063471614140874752000\,\#1^7 + 1518069903629532971139072000\,\#1^8 - 24345747195367204805253529600\,\#1^9 - 282223732589035180835156787200\,\#1^{10} + 1242156772544196101460499365888 0\,\#1^{11} + 710329994541951201737117479731 20\,\#1^{12} - 28775668625180807413975162762035 20\,\#1^{13} - 38942226439011207213978722469150720\,\#1^{14} - 83076749736557242056487941267521536\,\#1^{15} + 13292279957849158729038070602803445 76\,\#1^{16} \&, 13]\},$$

$$\{Q_0 \to \text{Root}[2251875390625 - 131766880000000\,\#1 - 57826836480000000\,\#1^2 - 4000515620864000000\,\#1^3 + 92455465857843200000\,\#1^4 + 1513668383462129664000\,\#1^5 - 321980633234202951680000\,\#1^6 -$$

```
        260040634716141408747520000 #1^7 + 151806990362953297113907200 0 #1^8 -
        24345747195367204805253529600 #1^9 - 2822237325890351808351567872 00 #1^10 +
        12421567725441961014604993658880 #1^11 + 710329994541951201737117479731 20 #1^12 -
        28775668625180807413975162762035 20 #1^13 - 38942226439011207213978722469150720 #1^14 -
        83076749736557242056487941267521536 #1^15 + 13292279957849158729038070602803445 76 #1^16 &, 14]},
  {Q0 → Root[2251875390625 - 131766880000000 #1 - 57826836480000000 #1^2 - 4000515620864000000 #1^3 +
        92455465857843200000 #1^4 + 151366838346212966400 00 #1^5 - 321980633234202951680000 #1^6 -
        260040634716141408747520000 #1^7 + 151806990362953297113907200 0 #1^8 -
        24345747195367204805253529600 #1^9 - 2822237325890351808351567872 00 #1^10 +
        12421567725441961014604993658880 #1^11 + 710329994541951201737117479731 20 #1^12 -
        28775668625180807413975162762035 20 #1^13 - 38942226439011207213978722469150720 #1^14 -
        83076749736557242056487941267521536 #1^15 + 13292279957849158729038070602803445 76 #1^16 &, 15]},
  {Q0 → Root[2251875390625 - 131766880000000 #1 - 57826836480000000 #1^2 - 4000515620864000000 #1^3 +
        92455465857843200000 #1^4 + 151366838346212966400 00 #1^5 - 321980633234202951680000 #1^6 -
        260040634716141408747520000 #1^7 + 151806990362953297113907200 0 #1^8 -
        24345747195367204805253529600 #1^9 - 2822237325890351808351567872 00 #1^10 +
        12421567725441961014604993658880 #1^11 + 710329994541951201737117479731 20 #1^12 -
        28775668625180807413975162762035 20 #1^13 - 38942226439011207213978722469150720 #1^14 -
        83076749736557242056487941267521536 #1^15 + 13292279957849158729038070602803445 76 #1^16 &, 16]}}
```

```
NSolve[-2251875390625 + 131766880000000 Q0 + 57826836480000000 Q0^2 +
    4000515620864000000 Q0^3 - 92455465857843200000 Q0^4 - 151366838346212966400 00 Q0^5 +
    321980633234202951680000 Q0^6 + 260040634716141408747520000 Q0^7 - 151806990362953297113907200 0 Q0^8 +
    24345747195367204805253529600 Q0^9 + 2822237325890351808351567872 00 Q0^10 -
    12421567725441961014604993658880 Q0^11 - 710329994541951201737117479731 20 Q0^12 +
    28775668625180807413975162762035 20 Q0^13 + 38942226439011207213978722469150720 Q0^14 +
    83076749736557242056487941267521536 Q0^15 - 13292279957849158729038070602803445 76 Q0^16 == 0, Q0]
```

```
{{Q0 → -0.0763461 - 0.0206812 i}, {Q0 → -0.0763461 + 0.0206812 i}, {Q0 → -0.0627296 - 0.0694059 i},
  {Q0 → -0.0627296 + 0.0694059 i}, {Q0 → -0.013034 - 0.00353075 i}, {Q0 → -0.013034 + 0.00353075 i},
  {Q0 → -0.00765551 - 0.00847029 i}, {Q0 → -0.00765551 + 0.00847029 i}, {Q0 → 0.00471743},
  {Q0 → 0.0148122 - 0.0291327 i}, {Q0 → 0.0148122 + 0.0291327 i}, {Q0 → 0.0274913 - 0.0176732 i},
  {Q0 → 0.0274913 + 0.0176732 i}, {Q0 → 0.0276322}, {Q0 → 0.0386548}, {Q0 → 0.226419}}
```

```
W6 = Table[W[6, l], {l, 0, 5}]
```

$$\left\{-\frac{1}{1024}+Q_0+\frac{Q_1}{2}+\frac{Q_2}{4}+\frac{Q_3}{8}+\frac{Q_4}{16}+\frac{Q_5}{32},\right.$$
$$497420\,Q_0^2+497420\,Q_0\,Q_1+125970\,Q_1^2+245480\,Q_0\,Q_2+125970\,Q_1\,Q_2+31824\,Q_2^2+119510\,Q_0\,Q_3+$$
$$62322\,Q_1\,Q_3+31824\,Q_2\,Q_3+8008\,Q_3^2+57188\,Q_0\,Q_4+30498\,Q_1\,Q_4+15808\,Q_2\,Q_4+8008\,Q_3\,Q_4+$$
$$2002\,Q_4^2+26690\,Q_0\,Q_5+14690\,Q_1\,Q_5+7800\,Q_2\,Q_5+4004\,Q_3\,Q_5+2002\,Q_4\,Q_5+495\,Q_5^2,$$
$$170544\,Q_0^2+170544\,Q_0\,Q_1+38760\,Q_1^2+93024\,Q_0\,Q_2+38760\,Q_1\,Q_2+8568\,Q_2^2+54264\,Q_0\,Q_3+$$
$$21624\,Q_1\,Q_3+8568\,Q_2\,Q_3+1820\,Q_3^2+32640\,Q_0\,Q_4+13056\,Q_1\,Q_4+4928\,Q_2\,Q_4+1820\,Q_3\,Q_4+$$
$$364\,Q_4^2+19584\,Q_0\,Q_5+8128\,Q_1\,Q_5+3108\,Q_2\,Q_5+1092\,Q_3\,Q_5+364\,Q_4\,Q_5+66\,Q_5^2,$$
$$26334\,Q_0^2+26334\,Q_0\,Q_1+4845\,Q_1^2+16644\,Q_0\,Q_2+4845\,Q_1\,Q_2+816\,Q_2^2+11799\,Q_0\,Q_3+$$
$$3213\,Q_1\,Q_3+816\,Q_2\,Q_3+120\,Q_3^2+8586\,Q_0\,Q_4+2397\,Q_1\,Q_4+576\,Q_2\,Q_4+$$
$$120\,Q_3\,Q_4+14\,Q_4^2+6189\,Q_0\,Q_5+1821\,Q_1\,Q_5+456\,Q_2\,Q_5+92\,Q_3\,Q_5+14\,Q_4\,Q_5+Q_5^2,$$
$$1540\,Q_0^2+1540\,Q_0\,Q_1+190\,Q_1^2+1160\,Q_0\,Q_2+190\,Q_1\,Q_2+18\,Q_2^2+970\,Q_0\,Q_3+154\,Q_1\,Q_3+18\,Q_2\,Q_3+$$
$$Q_3^2+816\,Q_0\,Q_4+136\,Q_1\,Q_4+16\,Q_2\,Q_4+Q_3\,Q_4+680\,Q_0\,Q_5+120\,Q_1\,Q_5+15\,Q_2\,Q_5+Q_3\,Q_5,$$
$$\left.22\,Q_0^2+22\,Q_0\,Q_1+Q_1^2+20\,Q_0\,Q_2+Q_1\,Q_2+19\,Q_0\,Q_3+Q_1\,Q_3+18\,Q_0\,Q_4+Q_1\,Q_4+17\,Q_0\,Q_5+Q_1\,Q_5\right\}$$

```
GroebnerBasis[W6, {Q5, Q4, Q3, Q2, Q1, Q0}]; // Timing
```

{5.98 Second, Null}

```
W7 = Table[W[7, l], {l, 0, 6}]
```

$$\left\{-\frac{1}{4096}+Q_0+\frac{Q_1}{2}+\frac{Q_2}{4}+\frac{Q_3}{8}+\frac{Q_4}{16}+\frac{Q_5}{32}+\frac{Q_6}{64},\right.$$
$$7726160\,Q_0^2+7726160\,Q_0\,Q_1+1961256\,Q_1^2+3803648\,Q_0\,Q_2+1961256\,Q_1\,Q_2+497420\,Q_2^2+1842392\,Q_0\,Q_3+$$
$$966416\,Q_1\,Q_3+497420\,Q_2\,Q_3+125970\,Q_3^2+875976\,Q_0\,Q_4+468996\,Q_1\,Q_4+245480\,Q_2\,Q_4+125970\,Q_3\,Q_4+$$
$$31824\,Q_4^2+406980\,Q_0\,Q_5+223516\,Q_1\,Q_5+119510\,Q_2\,Q_5+62322\,Q_3\,Q_5+31824\,Q_4\,Q_5+8008\,Q_5^2+$$
$$183464\,Q_0\,Q_6+104006\,Q_1\,Q_6+57188\,Q_2\,Q_6+30498\,Q_3\,Q_6+15808\,Q_4\,Q_6+8008\,Q_5\,Q_6+2002\,Q_6^2,$$
$$3124550\,Q_0^2+3124550\,Q_0\,Q_1+735471\,Q_1^2+1653608\,Q_0\,Q_2+735471\,Q_1\,Q_2+170544\,Q_2^2+918137\,Q_0\,Q_3+$$
$$394383\,Q_1\,Q_3+170544\,Q_2\,Q_3+38760\,Q_3^2+523754\,Q_0\,Q_4+223839\,Q_1\,Q_4+93024\,Q_2\,Q_4+38760\,Q_3\,Q_4+$$
$$8568\,Q_4^2+299915\,Q_0\,Q_5+130815\,Q_1\,Q_5+54264\,Q_2\,Q_5+21624\,Q_3\,Q_5+8568\,Q_4\,Q_5+1820\,Q_5^2+$$
$$169100\,Q_0\,Q_6+76551\,Q_1\,Q_6+32640\,Q_2\,Q_6+13056\,Q_3\,Q_6+4928\,Q_4\,Q_6+1820\,Q_5\,Q_6+364\,Q_6^2,$$
$$657800\,Q_0^2+657800\,Q_0\,Q_1+134596\,Q_1^2+388608\,Q_0\,Q_2+134596\,Q_1\,Q_2+26334\,Q_2^2+254012\,Q_0\,Q_3+$$
$$81928\,Q_1\,Q_3+26334\,Q_2\,Q_3+4845\,Q_3^2+172084\,Q_0\,Q_4+55594\,Q_1\,Q_4+16644\,Q_2\,Q_4+4845\,Q_3\,Q_4+$$
$$816\,Q_4^2+116490\,Q_0\,Q_5+38950\,Q_1\,Q_5+11799\,Q_2\,Q_5+3213\,Q_3\,Q_5+816\,Q_4\,Q_5+120\,Q_5^2+$$
$$77540\,Q_0\,Q_6+27151\,Q_1\,Q_6+8586\,Q_2\,Q_6+2397\,Q_3\,Q_6+576\,Q_4\,Q_6+120\,Q_5\,Q_6+14\,Q_6^2,$$
$$65780\,Q_0^2+65780\,Q_0\,Q_1+10626\,Q_1^2+44528\,Q_0\,Q_2+10626\,Q_1\,Q_2+1540\,Q_2^2+33902\,Q_0\,Q_3+7546\,Q_1\,Q_3+$$
$$1540\,Q_2\,Q_3+190\,Q_3^2+26356\,Q_0\,Q_4+6006\,Q_1\,Q_4+1160\,Q_2\,Q_4+190\,Q_3\,Q_4+18\,Q_4^2+20350\,Q_0\,Q_5+4846\,Q_1\,Q_5+$$
$$970\,Q_2\,Q_5+154\,Q_3\,Q_5+18\,Q_4\,Q_5+Q_5^2+15504\,Q_0\,Q_6+3876\,Q_1\,Q_6+816\,Q_2\,Q_6+136\,Q_3\,Q_6+16\,Q_4\,Q_6+Q_5\,Q_6,$$
$$2600\,Q_0^2+2600\,Q_0\,Q_1+276\,Q_1^2+2048\,Q_0\,Q_2+276\,Q_1\,Q_2+22\,Q_2^2+1772\,Q_0\,Q_3+232\,Q_1\,Q_3+$$
$$22\,Q_2\,Q_3+Q_3^2+1540\,Q_0\,Q_4+210\,Q_1\,Q_4+20\,Q_2\,Q_4+Q_3\,Q_4+1330\,Q_0\,Q_5+$$
$$190\,Q_1\,Q_5+19\,Q_2\,Q_5+Q_3\,Q_5+1140\,Q_0\,Q_6+171\,Q_1\,Q_6+18\,Q_2\,Q_6+Q_3\,Q_6,$$
$$\left.26\,Q_0^2+26\,Q_0\,Q_1+Q_1^2+24\,Q_0\,Q_2+Q_1\,Q_2+23\,Q_0\,Q_3+Q_1\,Q_3+22\,Q_0\,Q_4+Q_1\,Q_4+21\,Q_0\,Q_5+Q_1\,Q_5+20\,Q_0\,Q_6+Q_1\,Q_6\right\}$$

```
GroebnerBasis[W7, {Q6, Q5, Q4, Q3, Q2, Q1, Q0}]; // Timing
```

```
$Aborted
```

Kann man darüber etwas beweisen? Laden Sie ein anderes Package!

Die Überwindung des Intelligenztraumas

Initialisierung von *Theorema* :

```
Needs["Theorema`"];
```

Beispiel eines computer-generierten Beweises:

```
Definition["limit",
    ∀f,a limit[f, a] ⟺ ∀ϵ>0 ∃N ∀n≥N |f[n] − a| < ϵ]
```

```
Proposition["limit of sum", any[f, a, g, b],
    (limit[f, a] ∧ limit[g, b]) ⟹ limit[f + g, a + b]]
```

```
Definition["+:", any[f, g, x],
    (f + g)[x] = f[x] + g[x]]
```

```
Lemma["|+|", any[x, y, a, b, δ, ϵ],
    (|(x + y) − (a + b)| < (δ + ϵ))  ⟸  (|x − a| < δ ∧ |y − b| < ϵ)]
```

```
Lemma["max", any[m, M1, M2],
    m ≥ max[M1, M2]  ⇒  (m ≥ M1 ∧ m ≥ M2)]
```

```
Theory["limit",
    Definition["limit"]
    Definition["+:"]
    Lemma["|+|"]
    Lemma["max"]
]
```

The PCS prover: A heuristic proof method (by Bruno Buchberger 2000) for predicate logic.

Generates "natural" proofs.

For formulae with alternating quantifiers.

The proof of the above theorem (and hundreds of other theorems in analysis) can now be generated completely automatically by calling the PCS prover:

```
Prove[Proposition["limit of sum"], using → Theory["limit"], by → PCS]
```

The proof generated completely automatically by the above call of the PCS algorithm is shown below:

Prove:

(Proposition (limit of sum)) $\underset{f,a,g,b}{\forall}(\text{limit}[f, a] \wedge \text{limit}[g, b] \Rightarrow \text{limit}[f + g, a + b])$,

under the assumptions:

(Definition (limit:)) $\underset{f,a}{\forall}\left(\text{limit}[f, a] \Leftrightarrow \underset{\epsilon>0}{\forall}\underset{N}{\exists}\underset{n\geq N}{\forall}(|f[n] - a| < \epsilon)\right)$,

(Definition (+:)) $\underset{f,g,x}{\forall}((f + g)[x] = f[x] + g[x])$,

(Lemma (|+|)) $\underset{x,y,a,b,\delta,\epsilon}{\forall}(|(x + y) - (a + b)| < \delta + \epsilon \Leftarrow (|x - a| < \delta \wedge |y - b| < \epsilon))$,

(Lemma (max)) $\underset{m,M1,M2}{\forall}(m \geq \max[M1, M2] \Rightarrow m \geq M1 \wedge m \geq M2)$.

We assume

(1) $\text{limit}[f_0, a_0] \wedge \text{limit}[g_0, b_0]$,

and show

(2) $\text{limit}[f_0 + g_0, a_0 + b_0]$.

Formula (1.1), by (Definition (limit:)), implies:

(3) $\underset{\epsilon>0}{\forall}\underset{N}{\exists}\underset{n\geq N}{\forall}(|f_0[n] - a_0| < \epsilon)$.

By (3), we can take an appropriate Skolem function such that

(4) $\underset{\epsilon>0}{\forall}\underset{n\geq N_0[\epsilon]}{\forall}(|f_0[n] - a_0| < \epsilon)$,

Formula (1.2), by (Definition (limit:)), implies:

(5) $\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ (|g_0[n] - b_0| < \epsilon).$

By (5), we can take an appropriate Skolem function such that

(6) $\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{n\geq N_1[\epsilon]}{\forall}\ (|g_0[n] - b_0| < \epsilon),$

Formula (2), using (Definition (limit:)), is implied by:

(7) $\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ (|(f_0 + g_0)[n] - (a_0 + b_0)| < \epsilon).$

We assume

(8) $\epsilon_0 > 0,$

and show

(9) $\underset{N}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ (|(f_0 + g_0)[n] - (a_0 + b_0)| < \epsilon_0).$

We have to find N_2^* such that

(10) $\underset{n}{\forall}\ (n \geq N_2^* \Rightarrow |(f_0 + g_0)[n] - (a_0 + b_0)| < \epsilon_0).$

Formula (10), using (Definition (+:)), is implied by:

(11) $\underset{n}{\forall}\ (n \geq N_2^* \Rightarrow |(f_0[n] + g_0[n]) - (a_0 + b_0)| < \epsilon_0).$

Formula (11), using (Lemma (|+|)), is implied by:

(12) $\underset{\delta+\epsilon=\epsilon_0}{\exists_{\delta,\epsilon}}\ \underset{n}{\forall}\ (n \geq N_2^* \Rightarrow |f_0[n] - a_0| < \delta \wedge |g_0[n] - b_0| < \epsilon).$

We have to find δ_0^*, ϵ_1^*, and N_2^* such that

(13) $(\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \bigwedge \underset{n}{\forall}\ (n \geq N_2^* \Rightarrow |f_0[n] - a_0| < \delta_0^* \wedge |g_0[n] - b_0| < \epsilon_1^*).$

Formula (13), using (6), is implied by:

$(\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \bigwedge \underset{n}{\forall}\ (n \geq N_2^* \Rightarrow \epsilon_1^* > 0 \wedge n \geq N_1[\epsilon_1^*] \wedge |f_0[n] - a_0| < \delta_0^*),$

which, using (4), is implied by:

$(\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \bigwedge \underset{n}{\forall}\ (n \geq N_2^* \Rightarrow \delta_0^* > 0 \wedge \epsilon_1^* > 0 \wedge n \geq N_0[\delta_0^*] \wedge n \geq N_1[\epsilon_1^*]),$

which, using (Lemma (max)), is implied by:

(14) $(\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \bigwedge \forall_n (n \geq N_2^* \Rightarrow \delta_0^* > 0 \bigwedge \epsilon_1^* > 0 \bigwedge n \geq \max[N_0[\delta_0^*], N_1[\epsilon_1^*]])$.

Formula (14) is implied by

(15) $(\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \bigwedge \delta_0^* > 0 \bigwedge \epsilon_1^* > 0 \bigwedge \forall_n (n \geq N_2^* \Rightarrow n \geq \max[N_0[\delta_0^*], N_1[\epsilon_1^*]])$.

Partially solving it, formula (15) is implied by

(16) $(\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \bigwedge \delta_0^* > 0 \bigwedge \epsilon_1^* > 0 \bigwedge (N_2^* = \max[N_0[\delta_0^*], N_1[\epsilon_1^*]])$.

Now,

$(\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \bigwedge \delta_0^* > 0 \bigwedge \epsilon_1^* > 0$

can be solved for δ_0^* and ϵ_1^* by a call to Collins cad–method yielding a sample solution

$\delta_0^* \leftarrow \frac{\epsilon_0}{2}$,

$\epsilon_1^* \leftarrow \frac{\epsilon_0}{2}$.

Furthermore, we can immediately solve

$N_2^* = \max[N_0[\delta_0^*], N_1[\epsilon_1^*]]$

for N_2^* by taking

$N_2^* \leftarrow \max[N_0[\frac{\epsilon_0}{2}], N_1[\frac{\epsilon_0}{2}]]$.

Hence formula (16) is solved, and we are done.

□

Beispiel eines computer-erfundenen Satzes mit Beweis:

Gosper-Zeilberger-Paule-prover: Beispiel aus P. Paule, *Computer-Solution of Problem 94-2,* SIAM REVIEW Vol.37 (1995), 105-106.

Formula["SIAM series", $\sum_{k=1,\ldots,n} \frac{(-1)^{k+1}\,(4k+1)\,(2k)!}{2^k\,(2k-1)\,(k+1)!\,2^k\,k!}$]

Simplify[Formula["SIAM series"], by → PauleSchorn–Telescope, built–in → Built–in["PauleSchorn"]]

If `−1 + n' is a natural number, then:

$1 + \frac{-(-1)^n\,2^{-2n}\,(2n)!}{n!\,(1+n)!}$

```
Prove[Formula["SIAM series"], by → PauleSchorn–Telescope, built–in → Built–in["PauleSchorn"]]
```

Theorem:
If $(-1) + n$ is a natural number, then:

$$\sum_{k=1,\ldots,n} \left(\frac{-(-1)^k\, 2^{-2k}\, (2k)!\, (1+4k)}{k!\, (1+k)!\, ((-1)+2k)} \right) = 1 + \frac{-(-1)^n\, 2^{-2n}\, (2n)!}{n!\, (1+n)!}$$

Proof:
Let Δ_k denote the forward difference operator in k then
the Theorem follows from summing the equation

$$\frac{-(-1)^k\, 2^{-2k}\, (2k)!\, (1+4k)}{k!\, (1+k)!\, ((-1)+2k)} = \Delta_k \left[\frac{(-1)^k\, 2^{1+-2k}\, (2k)!\, (1+k)}{k!\, (1+k)!\, ((-1)+2k)} \right]$$

over the range $k = 1, \ldots, n$.

The equation is routinely verifiable
by dividing the right–hand side by the left–hand side
and simplifying the resulting rational function

$$\frac{\frac{(-1)^{1+k}\, 2^{1+-2\,(1+k)}\, (2\,(1+k))!\, (2+k)}{(1+k)!\, (2+k)!\, ((-1)+2\,(1+k))} - \frac{(-1)^k\, 2^{1+-2k}\, (2k)!\, (1+k)}{k!\, (1+k)!\, ((-1)+2k)}}{\frac{-(-1)^k\, 2^{-2k}\, (2k)!\, (1+4k)}{k!\, (1+k)!\, ((-1)+2k)}}$$

to 1.

ProofSimplifier[Null, branches → Proved]

```
System`FullSimplify[ (((-1)^(1+k) 2^(1+-2 (1+k)) (2 (1+k))! (2+k))/((1+k)! (2+k)! (-1+2 (1+k))) - ((-1)^k 2^(1+-2 k) (2 k)! (1+k))/(k! (1+k)! (-1+2 k)))/((-(-1)^k 2^(-2 k) (2 k)! (1+4 k))/(k! (1+k)! (-1+2 k))) ]
```

1

Zusammenfassung

100 % der Schulmathematik und 90 % der Vordiplom-Mathematik sind "auf Knopfdruck" verfügbar.

Mehr als die besten Mathematiker in ihrem Kopf zur Verfügung haben, hat jetzt jeder Laie in seinen Händen zur Verfügung.

Ist die Mathematik damit zu Ende? Werden wir Mathematiker uns bald selbst wegrationalisiert haben?

Computer-Mathematik: Triviale oder trivialisierte Mathematik?

Antwort auf obige Fragen müsste eigentlich für alle Mathematiker selbstverständlich sein.

Ist es aber nicht!

Antwort der *Puristen*:

Computer-Mathematik ist trivial.

Hände weg von den mathematischen Software-Systemen!

Antwort der *Populisten*:

Trivialisierte Mathematik braucht nicht mehr unterrichtet zu werden, sondern nur mehr als "Black-Box" benutzt zu werden.

Hände weg von der trivialisierten Mathematik!

Das Ziel der Mathematik war es schon immer, sich selbst zu "trivialiseren":

Ein nicht-trivialer Satz (mit nicht-trivialem Beweis) auf einer höheren Ebene

trivialisiert ("erschlägt")

unendlich viele Instanzen eines Problems auf einer niedrigeren Ebene.

Das Computer-Zeitalter unterscheidet sich von früheren Zeiten der Mathematik nur dadurch, dass der Begriff des "Erschlagens" eine viel genauere Bedeutung hat.

Je *algorithmischer* die Mathematik wird, umso *mehr* Mathematik brauchen wir!

Warum?

Beispiel: Existenzbeweis für Gröbner-Basen.

Die "Trivialisierung der Mathematik" ist nur durch die enormen Fortschritte in dem Bereich der Mathematik, den man "Computer-Mathematik" (mit vielen Teilgebieten) nennt, möglich geworden.

Konsequenz für die "Soziologie" der Mathematik:

Die "reinsten" und besten Mathematiker mögen sich um die Computer-Mathematik kümmern.

Konsequenz für die "Philosophie" der Mathematik:

Die Algorithmisierung der Mathematik ist niemals abgeschlossen:

Die Mathematiker haben bewiesen (!), dass sie niemals wegrationalisiert werden können.

Konsequenz für die "Politik" der Mathematik:

Wenn sich die Mathematik in aller Stille vom Computer verabschiedet, gibt sie sich selbst auf.

Konsequenz für die "Didaktik" der Mathematik:

Es ist naiv, den Computer aus dem Mathematik-Unterricht zu verbannen.

Es ist genauso naiv, den Computer an jeder Stelle in den Mathematik-Unterricht hineinzupressen.

Balance: Das "White-Box / Black-Box Prinzip".

Computer-Mathematik: Schlüsseltechnologie?

Mathematik ist nicht am Ende, sondern so dynamisch wie noch nie.

Gerade die Algorithmisierung beschert der Mathematik einen neuen Anfang und ihre Erfüllung.

Die Algorithmisierung der Mathematik ist die Selbstanwendung der Mathematik auf sich selbst.

Selbstanwendung ist das Wesen der Intelligenz.

In der Algorithmisierung der Mathematik liegt enorme Schubkraft:

Als Forschungsmittel.

Als Forschungsziel.

Als Problemlöseinstanz für die Realwissenschaften.

Als didaktisches Werkzeug.

Als Motor für formale Bildung.

(Computer-)Mathematik ist im "Auge des Hurrikans" der technologischen Entwicklungsspirale:

(Computer-)Mathematik: Die Automatisierung der Denktechnologie.

(Computer-)Mathematik ist eine (die?) Schlüsseltechnologie des Informations- und Kommunikationszeitalters.

Einige politische Konsequenzen:

Die Kraft der heutigen ökonomischen Entwicklung kommt nicht (nur) aus dem Schalten und Walten der Wirtschaftsexperten und Politiker, sondern aus der Kreativität der technischen Disziplinen, in deren Kern die Denktechnologie der Mathematik steht.

Es ist heute so motivierend wie nie, sich als junger Mensch auf das Abenteuer Mathematik-basierter Technik einzulassen.

Die (Computer-)Mathematik lebt in der Spannung zwischen theoretischer Tiefe und praktischer Schlagkraft, in der Welt der internationalen akademischen Forschung genauso wie in der Welt der heißesten IKT-Firmen. Gerade die besten Studenten sollten sich motiviert fühlen, in diesem Gebiet eine Karriere aufzubauen.

Den politisch Verantwortlichen muss klar (gemacht) werden, wo die Kraftquelle für den technologischen Fortschritt und die wirtschaftliche Entfaltung sitzt und wie diese lebendig erhalten werden kann.

Es ist modern geworden, in den Forschungsförderungsprogrammen die "Anwendungen" zu entdecken. So wichtig das ist, wird der Bogen heute oft überspannt. Die treibende Kraft im "Auge des Hurrikans" ist und bleibt das immer feinere Verständnis der Struktur der Natur und die immer wirkungsvollere Beherrschung der wissenschaftlichen Denktechnologie, deren Konzentrat die Mathematik und heute die sich selbst automatisierende Mathematik ist.

■ Referenzen

Der Inhalt dieses Vortrags wurde publiziert in:

B.Buchberger, 2000.
Computer-Algebra: Das Ende der Mathematik? Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2/2000, S. 16-19.

Das White-Box / Black-Box Prinzip wurde eingeführt in:

B.Buchberger, 1990.
Should Students Learn Integration Rules? SIGSAM Bulletin Vol.24/1,pp.10-17,1990.