Erschienen in Bayreuther Math. Schriften, Heft 21, (1986) 295 - 319

Über das Involutionsprinzip von Garsia und Milne

Peter Paule *

Einleitung

Sei γ eine Involution auf einer endlichen Menge M. Die Bahnen der von γ erzeugten Gruppe $\langle\gamma\rangle$, welche in natürlicher Weise auf M operiert, bestehen aus einelementigen Mengen, den Fixpunkten von γ, und aus den Mengen $\{m,\gamma(m)\}$, wobei $\gamma(m) \neq m$.

Ein simples Beispiel für die unmittelbare Ausnutzung dieser Tatsache ist folgende Beobachtung:
Die Anzahl der natürlichen Teiler von $n \in \mathbb{N}$ ist ungerade genau dann, falls n Quadratzahl ist.
(Für alle $d|n$ definiere $\gamma(d) := \frac{n}{d}$.)

Der oben formulierte Sachverhalt läßt nun mannigfache Erweiterungen zu, welche bestimmten kombinatorischen Objekten besonders angepaßt scheinen.
So entwickelten A. Garsia und S. Milne [5] eine neue und anwendungsreiche Technik zur Konstruktion von Bijektionen aus gewissen Involutionspaaren.

---

* Unterstützt durch die Alexander von Humboldt-Stiftung

Damit ist es ihnen gelungen, gestützt auf eine Bijektion von I. Schur [14], erstmalig einen rein bijektiven Beweis der ersten Rogers-Ramanujan Identität,

$$(1) \qquad 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)} = \prod_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})},$$

zu geben.
Weitere Anwendungen sind: kombinatorische Beweise von Polynom-Identitäten, Prinzip der Inklusion und Exklusion, Siebäquivalenz, Bijektionen zwischen gewissen Mengen von Zahlpartitionen, bijektive Beweise von Formeln für die Anzahl der Standard-Young-Tableaus, u.s.w.

Das "kleine" Involutionsprinzip

Eine Permutation α einer endlichen Menge M, d.h. $\alpha \in S_M$, heißt *Involution*, falls $\alpha^2 = 1$.

Übung: (i) Für I_n (= Anzahl der Involutionen auf $\underline{n} = \{1,2,\dots,n\}$) gilt: $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$, $I_o = I_1 = 1$.

(ii) Die erzeugende Funktion der I_n ist

$$\sum_{n=o}^{\infty} I_n \frac{t^n}{n!} = e^{t+\frac{t^2}{2}}.$$

Folgende immer wieder benötigte Tatsache formulieren wir als

Lemma: *Sei M endliche Menge, $\gamma \in S_M$ eine Involution mit der "Umkehr-Eigenschaft":*

$$\text{für } U,V \subseteq M \text{ ist } \gamma(m) \in \begin{cases} V, & \text{falls } m \in U \\ U, & \text{falls } m \in V \end{cases}.$$

Dann ist die Einschränkung von γ auf U, d.h. $\gamma|_U$, eine Bijektion von U auf V.

Beweis: Klar.

Bemerkung: Wie hier wird auch der Großteil des Folgenden allgemeiner für beliebige Bijektionen, welche die Umkehr-Eigenschaft besitzen, gültig bleiben. Wir werden uns jedoch jeweils auf Involutionen beschränken, da diese den betrachteten kombinatorischen Situationen in besonderer Weise angepaßt scheinen.

Sei $M = M^+ \dot\cup M^-$ eine disjunkte Zerlegung der endlichen Menge M. Bezüglich dieser sei eine "Vorzeichenfunktion" sign(m) für alle $m \in M$ definiert:

$$\mathrm{sign}(m) := \begin{cases} 1, & \text{falls } m \in M^+ \\ -1, & \text{falls } m \in M^- \end{cases}.$$

Als einfache Folgerung aus obigem Lemma erhält man nun:

"Kleines" Involutionsprinzip (KIP)

Gegeben sei eine disjunkte Zerlegung $M = M^+ \dot\cup M^-$ der endlichen Menge M und eine Involution $\gamma \in S_M$ mit der Umkehr-Eigenschaft: bei $M_\gamma = \{m \in M \mid \gamma(m) = m\}$ (*Fixpunktmenge von γ*) sei für $m \in M \setminus M_\gamma$

$$\gamma(m) \in \begin{cases} M^-, & \text{falls } m \in M^+ \\ M^+, & \text{falls } m \in M^- \end{cases}$$

(d.h. γ ist *sign-umkehrend außerhalb von F_γ*), dann gilt

$$\sum_{m \in M} \mathrm{sign}(m) = \sum_{m \in M_\gamma} \mathrm{sign}(m). \tag{2}$$

Beweis:

$$\sum_{m \in M} \mathrm{sign}(m) = \sum_{m \in M_\gamma} \mathrm{sign}(m) + \sum_{m \in M^+ \setminus M_\gamma} \mathrm{sign}(m) + \sum_{m \in M^- \setminus M_\gamma} \mathrm{sign}(m)$$

$$= \sum_{m \in M_\gamma} \mathrm{sign}(m) \quad \text{(nach obigem Lemma).}$$

Folgerung: Ist $M = M^+ \dot\cup M^-$ und $\gamma \in S_M$ sign-umkehrend außerhalb M_γ wie oben, jedoch $M_\gamma \subseteq M^+$, so ist

$$\sum_{m \in M} \mathrm{sign}(m) = |M_\gamma| = |M^+| - |M^-|. \tag{3}$$

Eine besonders schöne Anwendung davon (vgl. Zeilberger [16]) ist das

Prinzip von Inklusion und Exklusion

Gegeben sei eine endliche Menge A und eine Familie $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ von Teilmengen von A, wobei $A_s = \{a \in A \mid$ a hat Eigenschaft s$\}$ für $s = 1,2,\dots,n$.

Für $S \subseteq \underline{n}$ sei $A_S := \bigcap_{s \in S} A_s$ (Menge aller $a \in A$ mit allen Eigenschaften aus S; $A_\phi = A$).

Sei $A_o := A \setminus \bigcup_{s=1}^{n} A_s$, d.h. die Menge aller $a \in A$ *ohne* Eigenschaften aus $\underline{n}$, dann gilt:

$$(4) \qquad |A_o| = \sum_{S \subseteq \underline{n}} (-1)^{|S|} |A_S| .$$

Beweis: Wir definieren $M := \{(a,S) \mid a \in A,$ S Teilmenge von Eigenschaften von a$\}$, $M^+ := \{(a,S) \in M \mid |S|$ gerade$\}$ und $M^- := \{(a,S) \in M \mid |S|$ ungerade$\}$. Für alle $a \in A\setminus A_o$ sei

$$k(a) = \text{kleinste Eigenschaft von } a.$$

Das benötigte $\gamma \in S_M$ definieren wir nun so:

$$\text{Für } a \in A\setminus A_o \text{ sei } \gamma(a,S) := \begin{cases} (a, S\cup\{k(a)\}), & \text{falls } k(a) \notin S \\ (a, S\setminus\{k(a)\}), & \text{falls } k(a) \in S \end{cases}$$

und für $a \in A_o$ sei $\gamma(a,\phi) := (a,\phi)$.

Es ist nun leicht nachzuprüfen, daß $\gamma^2 = 1$ und γ sign-umkehrend außerhalb von $M_\gamma = \{(a,\phi) \in M \mid a \in A_o\} \subseteq M^+$. Daher folgt nach (3):

$$|A_o| = |M_\gamma| = |M^+| - |M^-|$$

$$= \sum_{(a,S)\in M^+} - \sum_{(a,S)\in M^-} = \sum_{\substack{S \subseteq \underline{n} \\ |S| \text{ gerade}}} |A_S| - \sum_{\substack{S \subseteq \underline{n} \\ |S| \text{ ungerade}}} |A_S| .$$

Ein anderes Beispiel für das Auftreten einer Involution wie im KIP, etwa auf dem Gebiet der Zahlpartitionen, wäre z.B. der elegante bijektive Beweis des Eulerschen Pentagonalzahlentheorems von Bressoud und Zeilberger in [3].

Für kombinatorische Beweise gewisser algebraischer Identitäten, z.B. Identitäten in bestimmten Polynomringen, erweist sich folgende Form des KIP als nützlich:

Kleines Involutionsprinzip (gewichtete Version)

Seien $M = M^+ \dot\cup M^-$, $\gamma \in S_M$ eine sign-umkehrende Involution außerhalb von M_γ wie oben. Sei $w: M \to R$ eine Gewichtsfunktion von M in einen geeigneten Ring R.

Ist γ *gewichtserhaltend*, d.h. für alle $m \in M: w(\gamma(m)) = w(m)$, dann gilt:

(5) $$\sum_{m \in M} \operatorname{sign}(m) \cdot w(m) = \sum_{m \in M_\gamma} \operatorname{sign}(m) \cdot w(m).$$

Beweis:

$$\sum_{m \in M} \operatorname{sign}(m) w(m) = \sum_{m \in M_\gamma} \operatorname{sign}(m) w(m) + \sum_{m \in M^+ \setminus M_\gamma} w(m) - \sum_{m \in M^- \setminus M_\gamma} w(m)$$

$$= \sum_{m \in M_\gamma} \operatorname{sign}(m) w(m) \quad \text{(Lemma)}.$$

Eine Anwendungsmöglichkeit dieser Formulierung bietet z.B.:

Der q-binomische Lehrsatz

Die *Gaußpolynome* (oder q-*Binomialkoeffizienten*) sind definiert durch ($n,k \in \mathbb{N}$)

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{cases} \dfrac{[n]!}{[k]![n-k]!}, & \text{falls } 0 \le k \le n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \text{ wobei } [n]! = [n][n-1]\dots[1],$$

$[0]! = 1$ und $[n] = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1}$.

Für reelles q geht $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ im Limes $q \to 1$ gegen den gewöhnlichen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (da $[n] = 1+q+\dots+q^{n-1} \to n$).
Faßt man q als Unbestimmte auf, so erweisen sich die $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ als Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, welche folgende Interpretation zulassen (Goulden und Jackson [8]):

(6) $$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{\rho \in R_{(k,n-k)}} q^{\operatorname{inv}(\rho)} ;$$

dabei ist $R_{(k,n-k)}$ die Menge aller Permutationen $\rho \in S_{\underline{n}}$, welche auf den Blöcken $\{1,2,\dots,k\}$ und $\{k+1,k+2,\dots,n\}$ monoton steigende Funktionen darstellen und $\operatorname{inv}(\rho)$ die Anzahl der Inversionen von ρ.
Z.B. ist $\rho = 2\ 5\ 1\ 3\ 4 \in R_{(2,3)}$ mit den Inversionen $(2,1),(5,1),(5,3)$ und $(5,4)$, d.h. $\operatorname{inv}(\rho) = 4$.

Bemerkung: Das ist nur eine der möglichen kombinatorischen Interpretationen der $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, für weitere siehe z.B. Kerber [10] oder Andrews [1].

Beweis von (6): $R_{(k,n-k)}$ ist eine Transversale der Linksnebenklassen von der Younguntergruppe $S_{(k,n-k)}$ in $S_{\underline{n}}$ (vgl. z.B. Kerber und Thürlings [9]).
Dabei ist $S_{(k,n-k)} = \{\sigma \in S_{\underline{n}} \mid \sigma[\underline{k}] = \underline{k} \text{ und } \sigma[\underline{n} \setminus \underline{k}] = \underline{n} \setminus \underline{k}\}$ kanonisch isomorph zum direkten Produkt $S_{\underline{k}} \times S_{\underline{n-k}}$. Benützt man dazu noch die wohlbekannte Tatsache, daß

(7) $$\sum_{\gamma \in S_{\underline{n}}} q^{\operatorname{inv}(\gamma)} = [n]!$$

(Beweis z.B. durch vollständige Induktion nach n), so erhält man

$$[n]! = \sum_{\gamma \in S_{\underline{n}}} q^{\operatorname{inv}(\gamma)} = \sum_{\substack{\rho \in R_{(k,n-k)} \\ \sigma \in S_{(k,n-k)}}} q^{\operatorname{inv}(\rho\sigma)} =$$

$$= \sum_{\substack{\rho \in R_{(k,n-k)} \\ \sigma \in S_{(k,n-k)}}} q^{\mathrm{inv}(\rho)+\mathrm{inv}(\sigma)}$$

$$= \sum_{\rho \in R_{(k,n-k)}} q^{\mathrm{inv}(\rho)} \cdot \sum_{\sigma_1 \in S_{\underline{k}}} q^{\mathrm{inv}(\sigma_1)} \cdot \sum_{\sigma_2 \in S_{\underline{n-k}}} q^{\mathrm{inv}(\sigma_2)}$$

$$= [k]!\,[n-k]! \sum_{\rho \in R_{(k,n-k)}} q^{\mathrm{inv}(\rho)} \qquad \text{(nach (7))},$$

und damit die Gültigkeit von (6).

Für manche Zwecke ist es nützlich, ein Element $\rho = r_1 r_2 \ldots r_k r_{k+1} \ldots r_n \in R_{(k,n-k)}$ als geordnete Mengenpartition $(\{r_1,r_2,\ldots,r_k\},\{r_{k+1},r_{k+2},\ldots,r_n\})$ von $\underline{n}$ aufzufassen.
Dabei definiert man natürlich

$\mathrm{inv}(\{r_1,\ldots,r_k\},\{r_{k+1},\ldots,r_n\}) := \mathrm{inv}(r_1 r_2 \ldots r_n)$.

Z.B. $\rho = 25134 \in R_{(2,3)}$ wird mit $(\{2,5\},\{1,3,4\})$ identifiziert und $\mathrm{inv}(\{2,5\},\{1,3,4\}) = \mathrm{inv}\rho = 4$.

Wir haben also analog zu (6):

$$(8) \qquad \left[{n \atop k}\right] = \sum_{\substack{(I,J): \\ I \dot\cup J = \underline{n} \\ |I|=k}} q^{\mathrm{inv}(I,J)}$$

Mit Hilfe der gewichteten Version (5) des KIP wollen wir nun für den sog. q-binomischen Lehrsatz: $(\forall x,q \in \mathbb{R})$

$$(9) \qquad (x-1)(x-q)\ldots(x-q^{n-1}) = \sum_{k=o}^{n} \left[{n \atop k}\right] q^{\binom{n-k}{2}} (-1)^{n-k} x^k ,$$

einen "bijektiven" Beweis geben.

(Für $q \to 1$ geht (9) über in $(x-1)^n = \sum_{k=o}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} x^k$,
d.h. (9) ist ein sog. q-*Analogon* des binomischen Lehrsatzes.)

<u>Beweis von (9):</u> Wir betrachten (9) als Gleichung in $\mathbb{R}[q][x]$, d.h. im Ring der Polynome in x über dem Ring der reellen Polynome in der Unbestimmten q. Klarerweise ist (9) äquivalent zu: für $l = 0,1,\ldots,n-1$ gilt

$$(10) \qquad \sum_{k=o}^{n} \left[{n \atop k}\right] q^{\binom{n-k}{2}} (-1)^{n-k} (q^l)^k = o.$$

Sei $M = \{(I,J) \mid I \dot\cup J = \underline{n}\}$, $M^+ = \{(I,J) \in M \mid |J| \text{ gerade}\}$ und $M^- = \{(I,J) \in M \mid |J| \text{ ungerade}\}$. Ferner sei

$$\gamma(I,J) = \begin{cases} (I \setminus \{n-l\},\ J \cup \{n-l\}), & \text{falls } n-l \in I \\ (I \cup \{n-l\},\ J \setminus \{n-l\}), & \text{falls } n-l \notin I \end{cases}$$

und $w: M \to \mathbb{R}[q]$ durch

$$w(I,J) = q^{\binom{|J|}{2} + \mathrm{inv}(I,J) + |I| \cdot l}$$

definiert.

Klarerweise ist $\gamma \in S_M$ mit $\gamma^2 = 1$ und $M_\gamma = \phi$ und man sieht leicht ein, daß $w(\gamma(I,J)) = w(I,J)$ für alle $(I,J) \in M$. Z.B. ist

$$\begin{aligned} inv(I\backslash n-1, J\cup n-1) &= inv(I,J)-inv(n-1,J)+inv(I\backslash n-1,n-1) \\ &= inv(I,J)+1-|J|, \text{ wegen} \end{aligned}$$

$|J|-inv(n-1,J) = 1-inv(I\backslash n-1,n-1)$.

Damit hat man

$$\begin{aligned} w(I\backslash n-1,J\cup n-1) &= q^{\binom{|J|+1}{2}+inv(I\backslash n-1,J\cup n-1)+(|I|-1)l} \\ &= q^{\binom{|J|}{2}+inv(I,J)+|I|\cdot l} = w(I,J). \end{aligned}$$

Gleichung (10) folgt nun sofort aus (5), denn

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\substack{(I,J): \\ I\dot{\cup}J=\underline{n}}} (-1)^{|J|} q^{\binom{|J|}{2}+inv(I,J)+|I|\cdot l} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}+k\cdot l} \sum_{\substack{(I,J): \\ I\dot{\cup}J=\underline{n} \\ |I|=k}} q^{inv(I,J)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} (q^l)^k \left[{n \atop k}\right] \quad \text{(wegen (8))}, \end{aligned}$$

und damit ist auch (9) gezeigt.

Für weitere Anwendungen der gewichteten Version des KIP verweisen wir z.B. auf Zeilbergers Beweis der Newton-Identität für symmetrische Funktionen in [17].

Das Involutionsprinzip von Garsia und Milne (GMIP)

Es seien $X = X^+\dot{\cup}X^-$ und $Y = Y^+\dot{\cup}Y^-$ Partitionen der endlichen Mengen X und Y, $f:X \to Y$ eine sign-erhaltende Bijektion (d.h. $f[X^+] = Y^+$ und $f[X^-] = Y^-$), $\alpha \in S_X$ eine sign-umkehrende Involution außerhalb von X_α und $\beta \in S_Y$ eine sign-umkehrende Involution außerhalb von Y_β, wobei $X_\alpha \subseteq X^+$ und $Y_\beta \subseteq Y^+$.

Aus unserem Lemma folgt sofort $|X_\alpha| = |Y_\beta|$.

In [5] haben Garsia und Milne erstmalig eine Methode zur Konstruktion einer expliziten Bijektion $\gamma:X_\alpha \to Y_\beta$ zwischen den obigen Fixpunktmengen angegeben, welche nicht auf einer bestimmten Auflistung der Elemente in X_α bzw. Y_β basiert. Vielmehr wird γ iterativ aus den gegebenen Abbildungen α,β und f wie folgt gewonnen: Sei $\alpha^* := f\alpha$ und $\beta^* := f^{-1}\beta$. Sei $x \in X_\alpha$. Bilde $\alpha^*(x)\in Y^+$: ist $\alpha^*(x) \in Y_\beta$, so definiere $\gamma(x) := \alpha^*(x)$, ansonsten bilde $\alpha^*\beta^*\alpha^*(x) \in Y^+$. Ist $\alpha^*\beta^*\alpha^*(x) \in Y_\beta$, so definiere $\gamma(x) := \alpha^*\beta^*\alpha^*(x)$, ansonsten bilde $\alpha^*(\beta^*\alpha^*)^2(x) \in Y^+$. Ist $\alpha^*(\beta^*\alpha^*)^2(x) \in Y_\beta$, so definiere $\gamma(x) := \alpha^*(\beta^*\alpha^*)^2(x)$, ansonsten mache weiter wie oben, so lange bis $\alpha^*(\beta^*\alpha^*)^k(x) \in Y_\beta$ und definiere $\gamma(x) := \alpha^*(\beta^*\alpha^*)^k(x)$. Daß dieser Fall auch wirklich eintritt, wird durch die Endlichkeit von Y^+ garantiert, d.h. in der fortgesetzten Y^+-Liste wären einmal zwei Elemente gleich: (o.B.d.A. $i < j$)

$$\alpha^*(\beta^*\alpha^*)^i(x) = \alpha^*(\beta^*\alpha^*)^j(x).$$

Nun folgt: $X^- \ni (\beta^*\alpha^*)^{j-i}(x) = x \in X^+$, ein Widerspruch zur Disjunktheit von X^+ und X^-.

Also definieren wir für jedes $x \in X_\alpha$:

$$\gamma(x) := \alpha^*(\beta^*\alpha^*)^{k(x)}(x),$$

wobei $k(x)$ die kleinste natürliche Zahl mit $\alpha^*(\beta^*\alpha^*)^{k(x)}(x) \in Y_\beta$ ist.

Die Injektivität der (α,β,f)-*iterierten Abbildung* γ folgt ganz analog zur obigen Überlegung, die Surjektivität aus der Symmetrie der Iteration.

Dieses Prinzip hat bereits zahlreiche interessante Anwendungen gefunden. So wurde es von Garsia und Milne [5] benutzt, um erstmalig einen rein bijektiven Beweis der 1. Rogers-Ramanujan Identität (1) geben zu können. Bressoud und Zeilberger [2] gelang es, ebenfalls gestützt auf das GMIP, eine wesentlich vereinfachte, iterative Rogers-Ramanujan-Bijektion zu finden. In [4] dehnen sie ihren Zugang auf allgemeinere Identitäten vom Rogers-Ramanujan Typ aus.

Etwas ausführlicher wollen wir auf das folgende Anwendungsgebiet des GMIP eingehen:

Inklusion-Exklusionsprinzip und Siebäquivalenz

Sei $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ eine Familie von Teilmengen einer endlichen Menge A, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ eine Familie von Teilmengen einer endlichen Menge B.

Für $S \subseteq \underline{n}$ sei $A_S := \bigcap_{s \in S} A_s$ und $B_S := \bigcap_{s \in S} B_s$ ($A_\phi = A$ und $B_\phi = B$). Für $A_o = A \setminus \bigcup_{s=1}^{n} A_s$ und $B_o = B \setminus \bigcup_{s=1}^{n} B_s$ gilt nach dem Prinzip von Inklusion-Exklusion (4):

$$(11) \qquad |A_o| = \sum_{S \subseteq \underline{n}} (-1)^{|S|} |A_S| \text{ und } |B_o| = \sum_{S \subseteq \underline{n}} (-1)^{|S|} |B_S|.$$

Man nennt nun die Familien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ *siebäquivalent*, falls $|A_S| = |B_S|$ für alle $S \subseteq \underline{n}$ (vgl. Wilf [15]). In diesem Fall folgt aus (11), daß $|A_o| = |B_o|$. Für siebäquivalente Familien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und bei gegebenen Bijektionen $f_S: A_S \to B_S$ für alle $S \subseteq \underline{n}$, ermöglicht nun das GMIP die *explizite* Konstruktion einer Bijektion $\gamma: A_o \to B_o$.
Diese Bijektion wird dabei nur von den gegebenen f_S abhängen, nicht von irgendwelchen Anordnungen der Elemente von A_o bzw. B_o.

Konstruktion von $\gamma: A_o \to B_o$

Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ wie oben. Um das GMIP anwenden zu können, definieren wir wie im Beweis des Inklusion-Exklusion Prinzips:
$X := \{(a,S) \mid a \in A,\ S$ Teilmenge von Eigenschaften von $a\}$,
$X^+ := \{(a,S) \in X \mid |S| \text{ gerade}\}$, $X^- := \{(a,S) \in X \mid |S| \text{ ungerade}\}$
und $Y := \{(b,S) \mid b \in B,\ S$ Teilmenge von Eigenschaften von $b\}$,
$Y^+ := \{(b,S) \in Y \mid |S| \text{ gerade}\}$, $Y^- := \{(b,S) \in Y \mid |S| \text{ ungerade}\}$.
Die dem γ im Beweis von (4) entsprechenden Involutionen auf X bzw. Y seien mit α bzw. β bezeichnet.

Um den Iterationsprozeß ablaufen zu lassen, benötigen wir noch eine Bijektion $f: X \to Y$ mit $f[X^+] = Y^+$ und $f[X^-] = Y^-$. Das wird jedoch durch die Abbildung

$$(a,S) \to (f_S(a),S) \text{ für alle } (a,S) \in X$$

geleistet.

Die (α,β,f)-iterierte Bijektion $\gamma : A_o \to B_o$ liefert nun das Gewünschte.

<u>Bemerkung:</u> Erstmalig wurde dieser Sachverhalt von Wilf in [15] untersucht. Ein gewisser Nachteil der obigen Konstruktion liegt darin, daß es auf die Reihenfolge der Numerierung der A_s bzw. B_s ankommen kann. Diese Einschränkung kann jedoch beseitigt werden, siehe Gordon [7]. Für viele wichtige Anwendungen, wie z.B. Zahlpartitionen, spielt diese Tatsache allerdings keine Rolle.

<u>Partitionsidentitäten</u>

Sei $\lambda = (\underbrace{\lambda_1,\ldots,\lambda_1}_{n_1\text{-mal}},\ldots,\underbrace{\lambda_k,\ldots,\lambda_k}_{n_k\text{-mal}})$ mit $o < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$ eine *Partition von* n (kurz: $\lambda \vdash n$), d.h. $\sum_{j=1}^{k} n_j\lambda_j = n$. Jedes solche λ kann man mit der Multimenge

$$\{n_1 * \lambda_1,\ldots,n_k * \lambda_k\}$$

identifizieren. Dabei bezeichnet $n_j * \lambda_j$ das n_j-malige Auftreten des Teils λ_j.

Die *Vereinigung zweier Multimengen* ergibt sich wie z.B.

$$\{1,1,2\} \cup \{1,2,2,2,3\} = \{1,1,2,2,2,3\}.$$

(Die Vereinigung ist also ein "kleinstes gemeinsames Vielfaches".)

Damit ist für $\lambda,\mu \vdash n$:

$$\lambda \cup \mu \text{ und } \lambda \subseteq \mu$$

definiert.

Die vorhin geschilderte Siebmethode liefert nun ein höchst wirkungsvolles Werkzeug, um viele klassische Partitionsidentitäten, d.h. die Gleichmächtigkeit bestimmter Mengen von Partitionen, zu behandeln. Das GMIP ermöglicht darüber hinaus sogar die *explizite* Konstruktion einer *Bijektion* der jeweiligen Mengen.

Bei dem nachfolgend angeführten Beispiel begnügen wir uns mit dem Aufstellen der Maschinerie, d.h. mit der Angabe von A,B,A_s,B_s und f_s.

<u>Satz</u> (Glaisher): *Die Anzahl der Partitionen von* n *in Teile* $\not\equiv 0$ $(\textit{mod } d)$ *ist gleich der Anzahl der Partitionen von* n, *in denen kein Teil mehr als* $(d-1)$*-mal auftritt.* (12)

<u>Bemerkung:</u> Hieraus folgt (für d=2) unmittelbar die Eulersche Beobachtung: *Die Anzahl der Partitionen von* n *in ungerade Teile ist gleich der Anzahl der Partitionen von* n *in verschiedene Teile.*

Beweis von (12): $A = B = \{\lambda \mid \lambda \vdash n\}$, $A_s = \{\lambda \in A \mid \{s \cdot d\} \subseteq \lambda\}$

und $B_s = \{\mu \in B \mid \{d * s\} \subseteq \mu\}$.

D.h. wir haben für $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subseteq \underline{n}$:

$A_S = \{\lambda \in A \mid \{s_1 d, s_2 d, \ldots, s_k d\} \subseteq \lambda\}$ und

$B_S = \{\mu \in B \mid \{d * s_1, d * s_2, \ldots, d * s_k\} \subseteq \mu\}$.

Definiere $f_S : A_S \to B_S$ so: jeder Teil $s_j d$ von $\lambda \in A_S$ wird durch $d * s_j$ ersetzt.

Damit läßt man den Mechanismus des GMIP ablaufen und erhält eine *Bijektion* für die in (12) auftretenden Mengen.

Bemerkung: (i) Sehr schön kann man den Iterationsprozeß im Falle $d = 2$ und $n = 18$ an der Tafel I in [13] verfolgen. Nach 14 Iterationen erhält man z.B. $(\{2,6,10\}, \phi)$ als Bild von $(\{1,1,3,3,5,5\}, \phi)$.

(ii) Es ist interessant anzumerken, daß die (α, β, f)-iterierte Bijektion γ genau die ursprünglich von Glaisher für den Beweis von (12) angegebene Bijektion [6] liefert, welche von zahlentheoretischer Natur und *nicht-iterativ* ist.

Die hier am konkreten Beispiel der Zahlpartitionen angedeuteten Überlegungen lassen sich mühelos für wesentlich allgemeinere Kompositionsstrukturen im Rahmen der Theorie der sog. "prefabs" durchführen (siehe dazu Wilf [15]).

Als eine weitere, besonders schöne Anwendung des GMIP wäre noch die Arbeit [12] von Remmel zu nennen, in der er bijektive Beweise von Formeln für die Anzahl der Standard-Young-Tableaus vorstellt.

Garsia und Milne entwickelten ihr Involutionsprinzip, um zu einem *bijektiven* Beweis der ersten Rogers-Ramanujan Identität (1) zu gelangen. Im folgenden, letzten Abschnitt wollen wir diese mit kombinatorisch-analytischen Hilfsmitteln zeigen, um etwas Einsicht in ihre Struktur zu erhalten.

Beweis der ersten Rogers-Ramanujan Identität

Sei $P_{\underline{n}}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \{(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k) \mid \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \Pi_j = \underline{n}$ und $|\Pi_j| = n_j$ für $j = 1, 2, \ldots, k\}$.

Eine *Inversion* von $(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k) \in P_{\underline{n}}(n_1, \ldots, n_k)$ ist ein Paar $(a,b) \in \Pi_i \times \Pi_j$ mit $a > b$ und $i < j$. Die q-*Multinomialkoeffizienten* sind definiert durch

$$\begin{bmatrix} n_1 + n_2 + \ldots + n_k \\ n_1, n_2, \ldots, n_k \end{bmatrix} = \frac{[n_1 + n_2 + \ldots + n_k]!}{[n_1]! [n_2]! \ldots [n_k]!} \quad \text{für } n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}.$$

Übung: Zeige analog dem Beweis von (8) bzw. (6), daß

$$(13) \qquad \begin{bmatrix} n \\ n_1, n_2, \ldots, n_k \end{bmatrix} = \sum_{\Pi \in P_{\underline{n}}(n_1, \ldots, n_k)} q^{\mathrm{inv}(\Pi)},$$

wobei $\mathrm{inv}(\Pi)$ = Anzahl der Inversionen von Π.

Beim Beweis von (1) wird folgende Identität eine zentrale Rolle spielen ($a,b \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ mit $|k| < \min(a,b)$):

(14) $$\sum_{j=|k|}^{\min(a,b)} \begin{bmatrix} a+b \\ a-j,j+k,j-k,b-j \end{bmatrix} q^{j^2-k^2} = \begin{bmatrix} a+b \\ a-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+b \\ a+k \end{bmatrix}.$$

<u>Beweis:</u> Vorgangsweise: für geeignete Mengen X,Y definieren wir Gewichte $w_1: X \to \mathbb{R}[q]$ und $w_2: Y \to \mathbb{R}[q]$ so, daß für eine bestimmte Bijektion $\gamma: X \to Y$

(15) $w_1(x) = w_2(\gamma(x))$ für alle $x \in X$.

Den beiden Seiten von (14) werden die Summen $\sum_{x\in X} w_1(x)$ bzw. $\sum_{y\in Y} w_2(y)$ entsprechen, während aus (15) dann ihre Gleichheit folgt.

Sei $X = \bigcup_{j=|k|}^{\min(a,b)} P_{\underline{a+b}}(a-j,j+k,j-k,b-j)$ und
$Y = P_{\underline{a+b}}(a-k,b+k) \times P_{\underline{a+b}}(a+k,b-k)$.
Für $\Pi \in X$ sei $w_1(\Pi) = q^{\mathrm{inv}(\Pi)+j^2-k^2}$,
für $(\Pi_1,\Pi_2) \in Y$ sei $w_2((\Pi_1,\Pi_2)) = q^{\mathrm{inv}(\Pi_1)+\mathrm{inv}(\Pi_2)}$.
Aus (13) folgt nun sofort, daß $\sum_{x\in X} w_1(x)$ = linke Seite und $\sum_{y\in Y} w_2(y)$ = rechte Seite von (14).

Zu jeder endlichen Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ sei ε_M der eindeutig bestimmte kanonische Ordnungsisomorphismus $\varepsilon_M: M \to \underline{|M|}$ (d.h. für $m,m' \in M: m < m' \Longleftrightarrow \varepsilon_M(m) < \varepsilon_M(m')$, z.B. für $M = \{1,3,5,6\}$ ist, in der Zweizeilenschreibweise, $\varepsilon_M = \binom{1\ 3\ 5\ 6}{1\ 2\ 3\ 4}$).

Wir definieren für $\Pi = (A,B,C,D) \in X$:

$\gamma(\Pi) := (\lambda(\Pi),\mu(\Pi))$, wobei

$\lambda(\Pi) := (\varepsilon_{A\cup B}[A] \cup a+k+\varepsilon_{C\cup D}[C],$
$\quad \varepsilon_{A\cup B}[B] \cup a+k+\varepsilon_{C\cup D}[D]) \in P_{\underline{a+b}}(a-k,b+k)$

und

$\mu(\Pi) := (A\cup B, C\cup D) \in P_{\underline{a+b}}(a+k,b-k)$

$(a+M = \{a+m \mid m \in M\},\ a+\phi = \phi)$.

Man sieht leicht ein, daß γ wohldefiniert und bijektiv ist.

Die gewichtserhaltende Eigenschaft (15) von γ folgt aus

$\mathrm{inv}(A,B,C,D) = \mathrm{inv}(A\cup B,C\cup D)+\mathrm{inv}(A,B)+\mathrm{inv}(C,D)$
$\quad = \mathrm{inv}\mu(A,B,C,D)+\mathrm{inv}\lambda(A,B,C,D)-(j^2-k^2)$,

denn

$\mathrm{inv}\lambda(A,B,C,D) = \mathrm{inv}(A,B)+\mathrm{inv}(C,D)$
$\quad +\mathrm{inv}(a+k+\varepsilon_{C\cup D}[C],\varepsilon_{A\cup B}[B])$
$\quad = \mathrm{inv}(A,B)+\mathrm{inv}(C,D)+(j-k)(j+k)$.

Damit ist alles gezeigt.

Beispiel: Sei $a=b=3$, $k=1$ und

$\Pi = (\{3\},\{1,5,6\},\{4\},\{2\}) \in X$.

Hier ist der Parameter $j=2$,

$\lambda(\Pi) = (\{2\}\cup 4+\{2\},\{1,3,4\}\cup 4+\{1\})$
$\quad = (\{2,6\},\{1,3,4,5\})$,

$\mu(\Pi) = (\{1,3,5,6\},\{2,4\})$ und

$w_1(\Pi) = q^{\mathrm{inv}\Pi+(j^2-k^2)} = q^{7+3} =$
$w_2(\gamma(\Pi)) = q^{\mathrm{inv}\lambda(\Pi)+\mathrm{inv}\mu(\Pi)} = q^{5+5}$.

Für alle möglichen k multipliziere man beide Seiten von (14) mit beliebigen Parametern $c_k \in \mathbb{R}$, die Summation über k ergibt dann

$$(16)\qquad \sum_{|k|\le \min(a,b)} c_k \begin{bmatrix}a+b\\a-k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a+b\\a+k\end{bmatrix} = \sum_{j=o}^{\min(a,b)} q^{j^2}\frac{[a+b]!}{[a-j]![b-j]!}\cdot \sum_{k=-j}^{j}\frac{c_k q^{-k^2}}{[j-k]![j+k]!}$$

nach Ausnutzung von $\displaystyle\sum_{|k|\le\min(a,b)}\ \sum_{j=|k|}^{\min(a,b)} = \sum_{j=o}^{\min(a,b)}\ \sum_{k=-j}^{j}$.

Von nun an sei q eine reelle Zahl mit $|q| < 1$.

Übung: Für $(q)_o := 1$, $(q)_n := (1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)$
und $(q)_\infty := (1-q)(1-q^2)\dots$ zeige:
$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix} \to \frac{1}{(q)_k}$ und $(q)_n \to (q)_\infty$ für $n \to \infty$.
(Hinweis: $[n] = 1+q+\dots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$).

Nach dem Grenzübergang $b \to \infty$ wird (16) zu

$$(17)\qquad \sum_{k=-a}^{a}\frac{c_k}{(q)_{a-k}(q)_{a+k}} = \sum_{j=o}^{a}\frac{q^{j^2}}{(q)_{a-j}}\sum_{k=-j}^{j}\frac{c_k q^{-k^2}}{(q)_{j-k}(q)_{j+k}}$$

Diese Transformation erweist sich als äußerst nützlich, um verschiedenste Identitäten vom Rogers-Ramanujan Typ zu untersuchen (vgl. Paule [11]). Der zentrale Punkt dabei ist die Tatsache, daß die zweite Summe der rechten Seite von (17) die gleiche Gestalt wie die Summe auf der linken Seite aufweist. Daher kann man (17) beliebig oft iterieren (man nimmt jeweils $c_k q^{-k^2}$ an

Stelle von c_k), um die linksseitige Summe auf eine wohlbekannte zu reduzieren, wie z.B. auf den q-*binomischen Lehrsatz* in der Form (x*o)

$$(18)\qquad \sum_{k=-a}^{a}\frac{(-1)^k q^{(1/2)k^2}x^k}{(q)_{a-k}(q)_{a+k}} = \frac{(x^{-1}q^{1/2})_a\,(xq^{1/2})_a}{(q)_{2a}}$$

Übung: (i) Zeige (18) aus (9).

(ii) Folgere aus (18) die *Jacobi-Identität* (x*o):

$$(19)\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2}x^k = \prod_{n=o}^{\infty}(1-q^{2n+2})(1+xq^{2n+1})(1+x^{-1}q^{2n+1}).$$

Um (17) benützen zu können, verwandeln wir das Produkt der rechten Seite von (1) mittels (19) in eine Summe:

$$(20)\qquad \prod_{n=o}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})} = \frac{1}{(q)_\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{(5/2)k^2-k/2}.$$

Jetzt iterieren wir (17) mit $c_k = (-1)^k q^{(5/2)k^2-k/2}$:

$$\sum_{k=-a}^{a}\frac{(-1)^k q^{(5/2)k^2-k/2}}{(q)_{a-k}(q)_{a+k}} = \sum_{j=o}^{a}\frac{q^{j^2}}{(q)_{a-j}}\sum_{k=-j}^{j}\frac{(-1)^k q^{(3/2)k^2-k/2}}{(q)_{j-k}(q)_{j+k}}$$

und

$$\sum_{k=-j}^{j}\frac{(-1)^k q^{(3/2)k^2-k/2}}{(q)_{j-k}(q)_{j+k}} = \sum_{l=o}^{j}\frac{q^{l^2}}{(q)_{j-k}}\sum_{k=-l}^{l}\frac{(-1)^k q^{(1/2)k^2-k/2}}{(q)_{l-k}(q)_{l+k}}$$

Damit sind wir beim q-binomischen Lehrsatz angelangt und der Knoten entwirrt sich folgendermaßen:

$$\sum_{k=-l}^{l} \frac{(-1)^k q^{(1/2)k^2-k/2}}{(q)_{l-k}(q)_{l+k}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } l=o \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(unmittelbar aus (18)), daher ist

$$\sum_{k=-j}^{j} \frac{(-1)^k q^{(3/2)k^2-k/2}}{(q)_{j-k}(q)_{j+k}} = \frac{1}{(q)_j} \text{ und}$$

$$\sum_{k=-a}^{a} \frac{(-1)^k q^{(5/2)k^2-k/2}}{(q)_{a-k}(q)_{a+k}} = \sum_{j=o}^{a} \frac{q^{j^2}}{(q)_{a-j}(q)_j} . \tag{21}$$

Nach $a \to \infty$ in (21) und der Umformung (20) sind wir mit dem Beweis der ersten Rogers-Ramanujan Identität fertig.

Bemerkung: Näheres zur Entstehung der Rogers-Ramnujan Identität und ihrer Verallgemeinerungen findet sich etwa bei Andrews [1].

Interpretiert man beide Seiten von (1) als erzeugende Funktionen in q, so entspricht der Gleichheit der Koeffizienten von q^n der folgende partitionstheoretische Sachverhalt:
Die Anzahl der Partitionen von n in Teile mit Mindestdifferenz 2 ist gleich der Anzahl der Partitionen von n in Teile kongruent 1 oder 4 (mod 5).

Z.B.: 9 = 9, 8+1, 7+2, 6+3, 5+3+1 und 9 = 9, 6+1+1+1, 4+4+1, 4+1+...+1, 1+...+1

Für die Garsia-Milne Bijektion zwischen diesen Mengen ist im letzten Abschnitt ihrer Arbeit [5] ein APL-Programm zu finden.

Literatur:

[1] G.E. ANDREWS: The Theory of Partitions. Encyclopedia of Mathematics, Vol. 2., Addison-Wesley, Reading, Mass., 1976.

[2] D.M. BRESSOUD, D. ZEILBERGER: A short Rogers-Ramanujan bijection, Discrete Math. 38 (1982), 313-315.

[3] - : Bijecting Euler's partitions-recurrence, A.M. Monthly 92 (1985), 54.

[4] - : Generalized Rogers-Ramanujan bijections, Advances in Math. (to appear).

[5] A.M. GARSIA, S.C. MILNE: A Rogers-Ramanujan Bijection, J. Comb. Th. (A) 31 (1981), 289-339.

[6] J.W.L. GLAISHER: A theorem in partitions, Mess. Math. 12 (1883), 158-170

[7] B. GORDON: Sieve-Equivalence and Explicit Bijections, J. Comb. Th. (A) 34 (1983), 90-93.

[8] I.P. GOULDEN, D.M. JACKSON: Combinatorial Enumeration. John Wiley & Sons, New York, 1983.

[9] A. KERBER, K.-J. THÜRLINGS: Symmetrieklassen von Funktionen und ihre Abzähltheorie, Teil II. Bayreuther Math. Schriften, Heft 15, 1983.

[10] - : Symmetrieklassen von Funktionen und ihre Abzähltheorie, Teil III. Tagungsbericht Sommerschule Diskrete Strukturen, Bayreuther Math. Schriften, Heft 20, 1985.

[11] P. PAULE: On Identities of the Rogers-Ramanujan Type, J. Math. Anal. Appl. 107 (1985), 255-284.

[12] J.B. REMMEL: Bijective Proofs of Formulae for the Number of Standard Young Tableaux, Lin. Mult. Algebra 11 (1982), 45-100.

[13] - : Bijective Proofs of Some Classical Partition Identities, J. Comb. Th. (A) 33 (1982), 273-286.

[14] I.J. SCHUR: Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie und zur Theorie der Kettenbrüche. Ges. Abhandlungen Bd. 2, 117-136 (Springer-Verlag Berlin, 1973).

[15] H.S. WILF: Sieve Equivalence in Generalized Partition Theory, J. Comb. Th. (A) 34 (1983), 80-89.

[16] D. ZEILBERGER: Garsia und Milne's bijective proof of the inclusion-exclusion principle, Discrete Math. 51 (1984), 109-110.

[17] - : A combinatorial proof of Newton's identities, Discrete Math. 49 (1984), 319.

Derzeitige Adresse des Autors:

Lehrstuhl II für Mathematik
Universität Bayreuth, Postfach 3008
D-8580 Bayreuth