BAYREUTHER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

ISSN 0172-1062

Heft 18, 1985

P. PAULE
Ein neuer Weg zur q-Lagrange Inversion 1 - 37

W. ROTHER
Zur Thomas-Fermi-von Weizsäcker Theorie für Atome und Moleküle 39-145

Schriftleitung: Prof. Dr. A. Kerber, Lehrstuhl II für Mathematik
Postfach 3008 · 8580 Bayreuth, W.-Deutschland

Bayreuther Math. Schr. 18 (1985), 1-37

Ein neuer Weg zur q-Lagrange Inversion

Peter Paule *

Einleitung

Die klassische Lagrangesche Inversionsformel (q=1) behandelt folgendes Problem:

Zwei formale Potenzreihen $f(x)$ und $\alpha(x)$ $(\alpha(o) \neq o)$ seien gegeben. Gesucht ist eine explizite Formel für die Koeffizienten c_n der Entwicklung

$$f(x) = f(o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k!} \left(\frac{x}{\alpha(x)}\right)^k .$$

Dieses wird durch die Formeln

$$(1) \qquad c_n = LD^{n-1} f'(x) \alpha^n(x) \qquad \text{(1. Version)} .$$

$$(2) \qquad c_n = LD^n f(x) \alpha^n(x) \left(1 - x \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right) \qquad \text{(2. Version)}$$

gelöst, wobei D der gewöhnliche Differentiationsoperator und L das Funktional $Lg(x) = g(o)$ bedeuten.

---

* Teilweise unterstützt durch die Alexander von Humboldt-Stiftung.

Eingereicht: 14.3.1985

Um ein q-*Analogon* davon zu bekommen, ersetzt man $(\frac{x}{\alpha(x)})^k$ durch die Folge formaler Potenzreihen $\frac{x^k}{\alpha_k(x)}$, wobei natürlich $\alpha_k(o) \neq o$ zu verlangen ist.
In diesem Fall gibt es nur sehr wenige Spezialfälle, für welche ähnliche Formeln wie (1) und (2) gelten.
Einen ausgezeichneten Überblick über das ziemlich umfangreiche und ergiebige Gebiet der Lagrange Inversion (für q=1 und q≠1) bietet J. Hofbauer in [9].

In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Zugang zum Problemkreis der q-Lagrange Inversion unternommen, in dem das Residuum-Funktional,

$$M \sum_{l=-k}^{\infty} a_l x^l = a_{-1} ,$$

eine zentrale Rolle spielt.
Eines der Merkmale dieses Zugangs wird sein, daß alle Resultate auch im Limes $q \to 1$ ihren Sinn behalten.
U.a. werden wir ein allgemeines neues q-Analogon der Lagrangeformel geben, welches das q-Analogon von Andrews, in [1], als Spezialfall enthält.
Im wesentlichen hoffen wir, einen besseren Einblick in den Zusammenhang einzelner Resultate von Cigler [4], Garsia [6], Gessel-Stanton [7], Hofbauer [8] und Krattenthaler [11] geben zu können.

Vorbereitende Definitionen

Mit L bezeichnen wir den Körper der formalen Laurentreihen über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

L_o sei der Ring der formalen Potenzreihen über $\mathbb{C}$.

$\mathcal{R}_o$ sei die Menge aller Elemente aus L_o, welche ein Inverses bezüglich der Multiplikation in L_o besitzen, also

$$\mathcal{R}_o = \{f(x) \in L_o \mid f(o) \neq o\}.$$

Mit q bezeichnen wir eine feste reelle Zahl mit $q \neq o$ und $|q| < 1$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$: $[\alpha] = \frac{q^\alpha - 1}{q-1}$.

Für $n,k \in \mathbb{N} \cup \{o\}$ ist das *Gaußsche Polynom*

$$\left[{n \atop k}\right] = \begin{cases} \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} & , 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $[n]! = [1][2]\ldots[n]$ und $[o]! = 1$.

Ferner bedienen wir uns der "q-hypergeometrischen" Schreibweise:

$$(x)_\infty = (x;q)_\infty = (1-x)(1-qx)(1-q^2x)\ldots\ldots = \lim_{n\to\infty}(x;q)_n$$

und $(x)_n = (x;q)_n = \frac{(x)_\infty}{(xq^n)_\infty}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Wir definieren den q-*Differentiationsoperator* D für $f(x) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k x^k \in L$ analog zur üblichen Definition (vgl. etwa [5]) durch

$$(Df)(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x} = \sum_{k=-m}^{\infty} [k]a_k x^{k-1}.$$

Abkürzend schreibt man auch $f'(x)$ an Stelle von $(Df)(x)$.

Ebenso schreiben wir oft - etwas schlampig - $Df(x)$ an Stelle von $(Df)(x)$, wobei jedoch in den konkreten Sachverhalten keine Deutungsprobleme auftreten werden.

Wie man leicht sieht, geht im Limes $q \to 1$ der q-Differentiationsoperator D in den gewöhnlichen Differentiationsoperator über, den wir D_o nennen wollen.
D ist also das diskrete q-Analogon des gewöhnlichen Differentiationsoperators.

Der ε-*Operator* auf L sei wie gewöhnlich durch

$$(\varepsilon f)(x) = f(qx)$$

definiert.

Für $a(x) \in L$ definieren wir den *Multiplikationsoperator* $\underline{a(x)}$ durch

$$\underline{a(x)}f(x) = a(x)f(x).$$

Wir werden jedoch stets einfach $a(x)$ an Stelle von $\underline{a(x)}$ schreiben, da die richtige Bedeutung jeweils klar aus dem Zusammenhang hervorgehen wird.

Klarerweise sind alle oben definierten Operatoren linear.

Beim Rechnen mit dem Differentiationsoperator D benötigen wir hauptsächlich die Produktregel

$$(3) \qquad (f(x)g(x))' = f'(x)g(qx) + f(x)g'(x).$$

Zu einer eingehenden Betrachtung der q-Operatorentechnik siehe man besonders die Arbeiten von Cigler [3] und [5].

Sei $f(x) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k x^k \in L$. Für den Koeffizienten a_n von x^n in $f(x)$ schreibt man häufig auch $\langle x^n \rangle f(x)$.
Eine besondere Rolle in unseren Untersuchungen spielt $\langle x^{-1} \rangle f(x)$, deshalb sei das lineare Funktional M auf L für jedes $f(x) \in L$ durch

$$M\, f(x) = \langle x^{-1} \rangle f(x)$$

festgelegt.
Ebenso zeichnen wir das lineare Funktional L auf L aus, indem wir es für jedes $f(x) \in L$ durch

$$L\, f(x) = \langle x^{0} \rangle f(x)$$

definieren.

Das folgende Lemma zählt alle für uns wichtigen Eigenschaften des Funktionals M auf.

Lemma 1.

(i) *Seien* $f(x), g(x) \in L$ *der Ordnung* $n (n \in \mathbb{Z})$, *bzw. der Ordnung* $n+1$ (*kurz:* $\operatorname{ord} f = \operatorname{ord} g - 1$), *d.h.* $f(x) = x^n \varphi(x)$, $g(x) = x^{n+1} \psi(x)$ *für* $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{R}_o$. *Dann gilt*

$$M\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\varphi(o)}{\psi(o)} .$$

(ii) *Seien* $f(x), g(x) \in L$ *mit* $\operatorname{ord} f \geqslant \operatorname{ord} g$. *Dann gilt*

$$M\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0 .$$

(iii) *Seien* $f(x) = x^n \varphi(x), g(x) = x^n \psi(x)$ *mit* $\varphi(x), \psi(x) \in \mathcal{R}_o$ (*d.h.* $\operatorname{ord} f = \operatorname{ord} g = n$). *Dann gilt*

$$M\left(\frac{f'(x)}{g(x)}\right) = [n] \frac{\varphi(o)}{\psi(o)} .$$

(iv) *Sei* $f(x) \in L$ *und* $n \in \mathbb{Z}$, *so gilt*

$$[n] \cdot M\left(\frac{f(x)}{x^{n+1}}\right) = M\left(\frac{f'(x)}{x^n}\right) .$$

(v) *Sei* $f(x) \in L_o$ *und* $n \in \mathbb{N} \cup \{o\}$, *so gilt*

$$M\left(\frac{f(x)}{x^{n+1}}\right) = \frac{1}{[n]!} LD^n f(x) .$$

ten

Beweis:

Wir beschränken uns auf die Demonstration von (iii), da sich diese Eigenschaft als besonders nützlich erweisen wird. Die übrigen Eigenschaften sind entweder trivial, oder folgen ebenso einfach.

$n \neq o$: Wegen $f'(x) = [n]x^{n-1}\varphi(qx) + x^n\varphi'(x)$ (nach (3)) ist

$$M\left(\frac{f'(x)}{g(x)}\right) = [n]M\left(\frac{1}{x}\,\frac{\varphi(qx)}{\psi(x)}\right) \quad \left(\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)} \in L_o\right)$$

$$= [n]\,\frac{\varphi(o)}{\psi(o)}\,\left(\frac{\varphi(qx)}{\psi(x)} \in \mathcal{R}_o\right).$$

$n = o$: $$M\left(\frac{f'(x)}{g(x)}\right) = M\left(\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)}\right) = o \quad \left(\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)} \in L_o\right).$$

Damit ist Eig.(iii) gezeigt.

Bemerkung:

Im Limes $q \to 1$ bleibt Lemma 1 gültig. Dabei geht D in den gewöhnlichen Differentiationsoperator D_o und [n] in n über ($n \in \mathbb{Z}$).

Das allgemeine q-Lagrange Problem

Sei $f(x) = \sum_{k=o}^{\infty} f_k x^k \in L_o$ gegeben.

Wir interessieren uns nun für die Koeffizienten c_n in der Entwicklung

$$f(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!}\, g_k(x) \tag{4}$$

wobei $g_k(x) = \dfrac{x^k}{\alpha_k(x)}$ mit $\alpha_k(x) \in \mathcal{R}_o$, $\alpha_k(o) = 1$ und $\alpha_o(x) \equiv 1$.

Wie man sich leicht überlegt, bedeuten die beiden letzten Bedingungen keine Beschränkung der Allgemeinheit.

Durch q-Differentiation auf beiden Seiten von (4) ergibt sich

$$f'(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k'(x).$$

Nun multiplizieren wir beide Seiten mit $\frac{1}{h_n(x)} \in L$, wobei $h_n(x) = \frac{x^n}{\beta_n(x)}$ mit $\beta_n(x) \in \mathcal{R}_o$ und $\beta_n(o) = 1$ erfüllt sein soll.

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{h_n(x)} = \sum_{k=o}^{n} \frac{c_k}{[k]!} \frac{g_k'(x)}{h_n(x)} + \frac{1}{h_n(x)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k'(x).$$

Das Funktional M auf beiden Seiten angewandt ergibt - wegen Lemma 1 (ii) -

$$M\left(\frac{f'(x)}{h_n(x)}\right) = \sum_{k=o}^{n} \frac{c_k}{[k]!} M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{[k]!} M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) + \frac{c_n}{[n-1]!}$$

(wegen Lemma 1 (iii) und $g_o'(x) = o$).

Nun können wir als Satz formulieren:

<u>Satz 1:</u>

Ist $f(x) = \sum_{l=o}^{\infty} f_l x^l \in L_o$ *gegeben. Sei* $f(x)$ *dargestellt als*

$$f(x) = f(o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k(x),$$

wobei $g_k(x) = \frac{x^k}{\alpha_k(x)}$ *mit* $\alpha_k(x) \in \mathcal{R}_o$ *und* $\alpha_k(o) = 1$.

So gilt für jede Folge von Potenzreihen $h_n(x)$ *mit* $h_n(x) = \frac{x^n}{\beta_n(x)}$, *wobei* $\beta_n(x) \in \mathcal{R}_o$ *und* $\beta_n(o) = 1$:

$$(5) \qquad c_n = L\, f(D)x\beta_n(D)x^{n-1} - [n-1]!\, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{[k]!}\, M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) .$$

<u>Beweis:</u>

Nach dem Vorhergehenden bleibt bloß noch

$$[n-1]!\, M\left(\frac{f'(x)}{h_n(x)}\right) = L\, f(D)x\beta_n(D)x^{n-1}$$

zu zeigen. Nach Definition der $h_n(x)$ und Lemma 1 (v) ist die linke Seite gleich

$$LD^{n-1}f'(x)\beta_n(x) = L\, f'(D)\beta_n(D)x^{n-1}$$

$$= L\, f(D)x\beta_n(D)x^{n-1}$$

nach den Rechenregeln für obige Operatoren (vgl. etwa Cigler [3]). Damit ist Satz 1 vollständig gezeigt.

Satz 1 hat nun weitreichende Konsequenzen:

Im Limes $q \to 1$ sei $g_k(x) = \left(\frac{x}{\alpha(x)}\right)^k$ und $h_n(x) = \left(\frac{x}{\alpha(x)}\right)^n$ mit $\alpha(o) = 1 (\alpha(x) \in \mathcal{R}_o)$.

Dann ist $(1 \leqslant k < n$ und $g(x) = \frac{x}{\alpha(x)})$

$$M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) = \frac{k}{k-n}\, M((g^{k-n}(x))')$$

$$= 0$$

nach Lemma 1 (iv) mit $q \to 1$ und $n = o$.

Damit erhalten wir die erste Version der gewöhnlichen (q=1) Lagrangeformel (1).

Die q-Lagrangerekursionsformel (5) kann man auch direkt anwenden. Zum Beispiel: Für Andrews' q-*Catalanzahlen* $\bar{c}_n$ gilt folgende Rekursionsformel (vgl. Andrews [1]).

Sei $x = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{c}_{n-1} x^n (xq)_n$, dann gilt

$$(6) \quad \bar{c}_{n-1} = \frac{q^{2n-2}}{[n]} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{bmatrix} + q \sum_{j=1}^{n-1} (1-q^{n-j}) q^{(n-j+1)(j-1)} \begin{bmatrix} 2j-1 \\ j-1 \end{bmatrix} \bar{c}_{n-1-}$$

Wir setzen in den Voraussetzungen von Satz 1: $f(x) = x$, $c_n = \bar{c}_{n-1}$, $\alpha_n(x) = \frac{1}{[n]!} \frac{1}{(qx)_n}$ und $\beta_n(x) = \alpha_n(qx)$.

Nun ist $L\, f(D) x \beta_n(D) x^{n-1} = L\, \alpha_n(qD) x^{n-1}$

$$= \frac{1}{[n]!} L \sum_{l=o}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1+l \\ l \end{bmatrix} q^{2l} D^l x^{n-1}$$

$$= \frac{q^{2n-2}}{[n]} \begin{bmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{bmatrix}.$$

Die zweite Zeile folgt aus der wohlbekannten Identität (siehe z.B. [5])

$$(7) \qquad \frac{1}{(x)_n} = \sum_{l=o}^{\infty} \begin{bmatrix} n-1+l \\ l \end{bmatrix} x^l.$$

Beachtet man, daß

$$(8) \qquad D \frac{1}{(x)_n} = [n] \frac{1}{(x)_{n+1}} \quad \text{und } D\, f(cx) = cf'(cx) \quad (c \in \mathbb{R}),$$

so erhält man nach leichter Rechnung

$$[n-1]!\ M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) = q[k]!\ \frac{[k]}{[n-k]}\ (q^{n-k}-1)q^{(k+1)(n-k-1)}\begin{bmatrix}2n-2k-1\\ n-k-1\end{bmatrix},$$

woraus sogleich (6) folgt.

In [1] gibt Andrews ein allgemeines q-Analogon der Lagrange Inversion für den Fall $\alpha_k(x) = \phi(xq)\phi(xq^2)\ldots\phi(xq^n)$, wobei $\phi(o) \neq o$.

Durch Anwendung der Cramerschen Regel auf (5) können wir nun für beliebige $\alpha_n(x) \in \mathcal{R}_o$ mit $\alpha_n(o) = 1$ (die letzte Bedingung bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit) folgenden Satz formulieren:

<u>Satz 2:</u>

Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt:

$$c_n = LD^{n-1}f'(x)B_n(x),\ \textit{wobei}$$

$$B_n(x) = \begin{vmatrix} \beta_n(x) & , x\beta_{n-1}(x) & , x^2\beta_{n-2}(x) & , \ldots & , x^{n-1}\beta_1(x) \\ \mu_{n,n-1} & , \quad 1 & , \quad 0 & , \ldots & , \quad 0 \\ \mu_{n,n-2} & , \mu_{n-1,n-2} & , \quad 1 & , \ldots & , \quad 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & \cdot & \\ \cdot & & & & 1, \quad 0 \\ \mu_{n,1} & , \mu_{n-1,1} & , \mu_{n-2,1} & , \ldots & \mu_{2,1}, \quad 1 \end{vmatrix}$$

mit $\mu_{n,k} = \frac{1}{[k]}\ M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right)$.

Nun ist Andrews' Theorem 1 in [1] folgender Spezialfall von Satz 2:

$$\alpha_n(x) = \phi(xq)\phi(xq^2) \ldots \phi(xq^n),$$
$$\beta_n(x) = \phi(xq^m)\phi(xq^{m+1}) \ldots \phi(xq^{m+n-1})$$

für ein festes $m \geqslant o$.

Wann bekommt die Determinante in Satz 2 eine möglichst einfache Gestalt?

Das ist i.a. dann der Fall, wenn

$$M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) = o \quad \text{für } 1 \leqslant k < n. \tag{9}$$

In diesem Fall reduziert sich (5) auf die vertraute Form

$$c_n = Lf(D)x\beta_n(D)x^{n-1}. \tag{10}$$

Ein nützliches Kriterium für den Fall (9) ist folgendes Lemma.

<u>Lemma 2.</u>

Für $1 \leqslant k < n$ *gilt:*

$$\begin{aligned}[n-k]!M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) &= [k]LD^{n-k-1}\,\frac{\beta_n'(x)\alpha_k(x)}{\alpha_k(x)\alpha_k(qx)} - \\ &\quad - [n]LD^{n-k-1}\,\frac{\beta_n(x)\alpha_k'(x)}{\alpha_k(x)\alpha_k(qx)}\end{aligned} \tag{11}$$

$$= [k]LD^{n-k-1}\ \beta_n'(x)\ \frac{1}{\alpha_k(qx)} +$$

(12)

$$+ [n]LD^{n-k-1}\ \beta_n(x)\ \left(\frac{1}{\alpha_k(x)}\right)'.$$

<u>Beweis:</u>

$$[n-k]!M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) =$$

$$= [n-k]![k]M\left(x^{k-n-1}\ \frac{\beta_n(x)}{\alpha_k(x)}\right) - [n-k]!q^kM\left(x^{k-n}\ \frac{\alpha_k'(x)\beta_n(x)}{\alpha_k(x)\alpha_k(qx)}\right)$$

(Produktregel (3))

$$= [n-k-1]![k]M\left(x^{k-n}\ \frac{\beta_n'(x)\alpha_k(x)}{\alpha_k(x)\alpha_k(qx)}\right) - [n-k-1]![n]M\left(x^{k-n}\ \frac{\beta_n(x)\alpha_k'(x)}{\alpha_k(x)\alpha_k(qx)}\right)$$

(Lemma 1 (iv) und $[k]+q^k[n-k] = [n]$).

Aus Lemma 1 (v) folgt nun der erste Teil der Behauptung (11). Der zweite Teil (12) folgt daraus wieder mit Produktregel (3).

Aus Lemma 2 können wir nun alle bisher bekannten Spezialfälle der q-Lagrange Inversion sehr einfach ableiten:

a) Wählt man $\beta_n(x) = \alpha_n(x)$, so erhält man aus (11) als hinreichend für (9):

(13) $$\frac{1}{[n]}\ \frac{\alpha_n'(x)}{\alpha_n(x)} = \frac{1}{[k]}\ \frac{\alpha_k'(x)}{\alpha_k(x)}\quad (1 \leq k < n).$$

Das ist im wesentlichen Lemma 1 von Hofbauer in [8].

b) Wählt man $\beta_n(x) = \alpha_n(qx)$, so ist der erste Term der rechten Seite von (11)

$$[k]qLD^{n-k-1}\frac{\alpha_n'(qx)}{\alpha_k(qx)} = [k]q^{n-k}LD^{n-k-1}\frac{\alpha_n'(x)}{\alpha_k(x)}$$

(wegen $a(D)\ \varepsilon = \varepsilon a(qD)$, vgl. etwa Cigler [3]).

Wie in a) erhält man als hinreichend für (9):

$$\frac{q^n}{[n]}\frac{\alpha_n'(x)}{\alpha_n(qx)} = \frac{q^k}{[k]}\frac{\alpha_k'(x)}{\alpha_k(qx)} \quad (1 \leqslant k < n). \tag{14}$$

Das ist i.w. Lemma 2 von Hofbauer in [8].

c) Wählt man $\alpha_n(x) = \varphi_n(x)\Psi_n(x)$ und $\beta_n(x) = \varphi_n(qx)\Psi_n(x)$, so wird der erste Term der rechten Seite von (11) zu (Produktregel (3))

$$[k]qLD^{n-k-1}\frac{\varphi_n'(qx)\Psi_n(qx)}{\varphi_k(qx)\Psi_k(qx)} + [k]LD^{n-k-1}\frac{\varphi_n(qx)\Psi_n'(x)}{\varphi_k(qx)\Psi_k(qx)}$$

$$= [k]q^{n-k}LD^{n-k-1}\frac{\varphi_n'(x)\Psi_n(x)}{\varphi_k(x)\Psi_k(x)} + [k]LD^{n-k-1}\frac{\varphi_n(qx)\Psi_n'(x)}{\varphi_k(qx)\Psi_k(qx)}, \tag{15}$$

der zweite Term der rechten Seite von (11) zu

$$[n]LD^{n-k-1}\frac{\varphi_n(qx)\Psi_n(x)\varphi_k'(x)}{\varphi_k(x)\Psi_k(x)\varphi_k(qx)} + [n]LD^{n-k-1}\frac{\varphi_n(qx)\Psi_n(x)\Psi_k'(x)}{\Psi_k(x)\varphi_k(qx)\Psi_k(qx)} \tag{16}$$

Vergleicht man nun die linken Seiten (bzw. die rechten) von (15) und (16), so ergibt sich als hinreichend für (9):

$$\frac{q^n}{[n]}\frac{\varphi_n'(x)}{\varphi_n(qx)} = \frac{q^k}{[k]}\frac{\varphi_k'(x)}{\varphi_k(qx)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{[n]}\frac{\Psi_n'(x)}{\Psi_n(x)} = \frac{1}{[k]}\frac{\Psi_k'(x)}{\Psi_k(x)} (1 \leqslant k < n). \tag{17}$$

Das ist i.w. Krattenthalers Hauptresultat von [11].
(Vgl. dazu auch Hofbauer [9].)
Dieser Fall enthält bei geeigneter Wahl von $\varphi_n(x)$ bzw. $\psi_n(x)$ die vorigen Fälle a) bzw. b).

Bemerkung:

Diese Ableitung von c) scheint einiges Licht auf die relativ lange "Verborgenheit" von Krattenthalers Resultat zu werfen.

Eine besondere Rolle bei der Betrachtung obiger Spezialfälle spielt der von Hofbauer ([8],[9],[10]) geprägte Begriff der "q-*Potenzen*":
Man nennt die formalen Potenzreihen $\varphi_\alpha(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) q-*Potenzen bezüglich einer fest vorgegebenen* $\varphi(x) \in L_o$, wenn $\varphi_\alpha(o) = 1$ und

$$\varphi'_\alpha(x) = [\alpha]\varphi_\alpha(x)\varphi(x)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Bevor wir die bisher beobachteten Tatsachen zusammenfassen, wollen wir in analoger Weise, unter der Voraussetzung von Bedingung (9), ein q-Analogon der 2. Version der Lagrangeschen Inversionsformel geben und einige Hilfssätze anführen.

Lemma 3:

Für $g(x), h(x) \in L$ *gilt*

$$M\left(\frac{g'(x)}{h(x)}\right) = M\left(\frac{g(qx)h'(x)}{h(x)h(qx)}\right)$$

Beweis:

Folgt aus Produktregel (3)

$$\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{h(x)} - \frac{g(qx)h'(x)}{h(x)h(qx)}$$

und $M\, a'(x) = o$ (Lemma 1 (iii)).

Haben wir nun wie im Satz 1

$$f(x) = f(o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k(x), \tag{18}$$

so legt Lemma 3 folgende Vorgangsweise nahe:

Man wendet auf beide Seiten von (18) den ε-Operator an und multipliziert anschließend beide Seiten mit $\frac{h_n'(x)}{h_n(x)h_n(qx)}$ (wobei $h_n(x)$ wie in Satz 1 zu wählen ist). Dann auf beiden Seiten das Funktional M angewandt ergibt

$$M\left(\frac{f(qx)h_n'(x)}{h_n(x)h_n(qx)}\right) = M\left(f(o)\frac{h_n'(x)}{h_n(x)h_n(qx)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} \frac{g_k(qx)h_n'(x)}{h_n(x)h_n(qx)}\right).$$

Wegen Lemma 3 reduziert sich das unter der Voraussetzung (9),

$$M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) = o,$$

auf

$$c_n = [n-1]!M\left(\frac{f(qx)h_n'(x)}{h_n(x)h_n(qx)}\right)$$

$$= [n]!q^{-n}M\left(\frac{f(qx)}{x^{n+1}}\left(\beta_n(x) - \frac{x}{[n]}\beta_n'(x)\right)\right)$$

(Produktregel (3))

$$= q^{-n}LD^n f(qx)\beta_n(x)\left(1 - \frac{x}{[n]}\frac{\beta_n'(x)}{\beta_n(x)}\right)$$

(Lemma 1 (v)).

Zusammenfassend formulieren wir

<u>Satz 3:</u>

Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt:

Ist

$$f(x) = f(o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k(x)$$

und $M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) = o$ *für* $1 \leqslant k < n$, *dann berechnen sich die Koeffizienten* c_n *zu*

(19)
$$c_n = LD^{n-1}f'(x)\beta_n(x)$$
$$= Lf(D)x\beta_n(D)x^{n-1} \qquad \text{(1. Version)}$$

(20)
$$c_n = q^{-n}LD^n f(qx)\beta_n(x)\left(1 - \frac{x}{[n]}\frac{\beta_n'(x)}{\beta_n(x)}\right) \qquad \text{(2. Version).}$$

Bemerkung 1:

In den oben angeführten Spezialfällen a) und b) ((13) und (14)) wurde die 2. Version von Hofbauer in [8] gegeben.

Bemerkung 2:

Man überzeugt sich leicht, daß - wie bei Satz 1 - die 2. Version (20) im Limes $q \to 1$ in die 2. Version der gewöhnlichen Lagrangeformel (2) übergeht.

Bemerkung 3:

Selbstverständlich könnte man (20) direkt aus Satz 1 bzw. dem Spezialfall (10) gewinnen. Jedoch scheint mir die obige Ableitung (mit Hilfe des Lemmas 3) das Auftreten der 2. Version besser zu durchleuchten.

Zur Existenz und Eindeutigkeit der $\beta_n(x)$

Zentral für die Lösung des allgemeinen q-Lagrange Problems ist die sich aus Satz 1 ergebende Frage:

Für welche Folge $\beta_n(x) \in \mathcal{R}_o$ mit $\beta_n(o) = 1$ sind bei gegebener Folge $\alpha_n(x) \in \mathcal{R}_o$ mit $\alpha_n(o) = 1$ die Bedingungen

$$M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) = o \quad \text{für} \quad 1 \leqslant k < n$$

erfüllt?

Wir beschränken uns (o.B.d.A.) auf die Betrachtung der 1. Version (19).

Da für ein beliebiges $\varphi(x) \in \mathcal{R}_o$

$$LD^{n-1}f'(x)(\beta_n(x)+x^n\varphi(x)) = LD^{n-1}f'(x)\beta_n(x)$$

und

$$M\left(\frac{g_k'(x)}{x^n}\beta_n(x)\right) = M\left(\frac{g_k'(x)}{x^n}(\beta_n(x)+x^n\varphi(x))\right)$$

gilt, können wir das Problem auf die Betrachtung der Anfangspolynome (n-1)-ten Grades

$$\beta_n(x) = \beta_{n,o} + \beta_{n,1}x + \ldots + \beta_{n,n-1}x^{n-1}$$

bei vorgegebenen

$$\beta_n(x) = \sum_{l=o}^{\infty} \beta_{n,l}x^l$$

reduzieren.

Nun jedoch ist alles klar: man überlegt sich leicht, daß die Folge der Polynome (n-1)-ten Grades $\beta_n(x)$ mit $\beta_n(o) = 1$ bei vorgegebener Folge $\alpha_n(x) \in \mathcal{R}_o$ mit $\alpha_n(o) = 1$ durch die Bedingungen

$$M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) = o \quad \text{für} \quad 1 \leqslant k < n$$

eindeutig rekursiv festgelegt ist.

Wie wir im letzten Abschnitt etwas eingehender ausführen werden, ist das eine äquivalente Formulierung der Matrixinversions-Methode, wie sie etwa bei Gessel-Stanton in [7] beschrieben und verwendet wird.

Im Licht des vorliegenden Ansatzes spaltet sich das allgemeine q-Lagrange Problem anscheinend in zwei Fälle:

1) Für bestimmte "geschlossene" Formen der $\alpha_n(x)$ lassen sich die zugehörigen $\beta_n(x)$ "sofort" angeben.
   Hier scheinen die q-Potenzen eine bedeutsame Rolle zu spielen. Das bisher allgemeinste bekannte Beispiel von q-Potenzen ist

$$\phi_\alpha(x) = \frac{e_r((a[\alpha]+b)x^r)}{e_r(bx^r)} , \tag{21}$$

   das jedoch für die Anwendungen vollkommen ausreichend ist (Hofbauer [9]).
   Dabei ist $e_r(x)$ die q^r-Exponentialfunktion.
   (In $e(x) = \sum_{l=o}^{\infty} \frac{x^l}{[l]!}$ wird q durch q^r ersetzt.
   Siehe z.B. Cigler [5]).

2) Im allgemeinen scheint es jedoch so zu sein, daß man für vorgegebene $\alpha_n(x)$ die zugehörigen $\beta_n(x)$ rekursiv, z.B. mit

$$M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right) = o \qquad (1 \leqslant k < n)$$

   ermitteln muß.

Beispiel:

In [7, Th. 3.2] spielt folgendes Theorem eine zentrale Rolle: (Damit kann ein systematischer Zugang zu q-Analoga quadratischer Transformationen hypergeometrischer Reihen gegeben werden. Ebenfalls können daraus die Rogers-Ramanujan Identitäten und eine große Anzahl von Identitäten dieses Typs abgeleitet werden. Siehe [7].)

Ist $f(x) = \sum_{l=o}^{\infty} f_l x^l$ gegeben. Dann gilt für

$$\frac{(x)_\infty}{(Ax)_\infty} f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{c_n}{[n]!} \frac{x^n}{(Ax)_n (1-\frac{x}{q})(1-\frac{x}{q^2})\ldots(1-\frac{x}{q^n})}$$

$$(22) \quad c_n = [n]! \sum_{k=o}^{n} f_k (-1)^{n-k} q^{n(k-n)+\binom{n-k+1}{2}} \frac{(Aq)_{2n-1}}{(Aq)_{n+k}} \cdot \frac{1-Aq^{2k}}{(q)_{n-k}} .$$

Gessel und Stanton geben auch die sog. "derivative form" [7, Th. 3.15] davon an:

Ist $f(x) = \sum_{l=o}^{\infty} f_l x^l$ gegeben. Dann gilt für

$$\frac{(x)_\infty}{(Ax)_\infty} \frac{f(x)}{1-qAx^2} = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{c_n}{[n]!} \frac{x^n}{(Ax)_{n+2}(1-\frac{x}{q})(1-\frac{x}{q^2})\ldots(1-\frac{x}{q^n})}$$

$$(23) \quad c_n = [n]!(1-Aq^{2n}) \sum_{k=o}^{n} f_k (-1)^{n-k} q^{n(k-n)+\binom{n-k+1}{2}} \frac{(Aq)_{2n-1}}{(Aq)_{n+k}(q)_{n-k}} .$$

Diese Spezialfälle der q-Lagrange Inversion wurden in [7] mit der Methode der Matrix-Inversion gewonnen. (Fall 2 in obiger Diskussion).

Zur expliziten Lösung (Fall 1) wurde von Krattenthaler der Weg geebnet.

Wir geben eine leichte Verallgemeinerung seines Resultats:

Satz 4:

Gegeben sei $g(x) \in L_o$, $\varphi_\alpha(x) \in \mathcal{R}_o$ *und* $\Psi_\alpha(x) \in \mathcal{R}_o$ *mit* $\frac{1}{[\alpha]}\frac{\varphi'_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(x)} = \varphi(x)$ *und* $\frac{q^\alpha}{[\alpha]}\frac{\Psi'_\alpha(x)}{\Psi_\alpha(qx)} = \Psi(x)$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann gilt für die Darstellung

$$(24) \qquad g(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} \frac{x^k}{\varphi_{k+\lambda}(ax)\Psi_{k+\mu}(bx)} \quad (a,b,\lambda,\mu \in \mathbb{R}).$$

$$(25) \qquad c_n = Lg(D)\varphi_\lambda(aD)\Psi_\mu(bD)x \frac{\varphi_{n+\lambda}(aD)\Psi_{n+\mu}(qbD)}{\varphi_\lambda(aD)\Psi_\mu(qbD)} x^{n-1}$$

(1. Version)

und

$$(26) \qquad c_n = LD^n g(x)\varphi_{n+\lambda}(\tfrac{a}{q}x)\Psi_{n+\mu}(qbx)(1-\tfrac{a}{q}x\varphi(\tfrac{a}{q}x)-bx\Psi(bx) + (1-q^{\lambda-\mu})\tfrac{ab}{q}x^2\varphi(\tfrac{a}{q}x)\Psi(bx)).$$

(2. Version)

Krattenthaler hat in [11] *die 2. Version mit* a=b=1 *und* $\varphi_\alpha(o) = \Psi_\alpha(o) = 1$ *gegeben. Für diesen Fall zeigte er ein weites Feld von interessanten Anwendungen* ([10], *siehe dazu auch* [9]).

Zum Beweis von Satz 4 benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 4:

Seien $\varphi_\alpha(x)$, $\Psi_\alpha(x) \in \mathcal{R}_o$ *mit*

$$\frac{1}{[\alpha]}\frac{\varphi'_\alpha(x)}{\varphi_\alpha(x)} = \varphi(x) \quad \text{und} \quad \frac{q^\alpha}{[\alpha]}\frac{\Psi'_\alpha(x)}{\Psi_\alpha(qx)} = \Psi(x) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt für feste $\lambda,\mu,a,b \in \mathbb{R}$:

$$\text{(i)} \quad \tilde{\varphi}_n(ax) = \frac{\varphi_{n+\lambda}(ax)}{\varphi_\lambda(ax)} \Rightarrow \frac{1}{[n]}\frac{\tilde{\varphi}'_n(ax)}{\tilde{\varphi}_n(ax)} = aq^\lambda \frac{\varphi_\lambda(ax)}{\varphi_\lambda(qax)}\varphi(ax),$$

$$\text{(ii)} \quad \tilde{\Psi}_n(bx) = \frac{\Psi_{n+\mu}(bx)}{\Psi_\mu(bx)} \Rightarrow \frac{q^n}{[n]}\frac{\tilde{\Psi}'_n(bx)}{\tilde{\Psi}_n(qbx)} = bq^{-\mu}\frac{\Psi_\mu(qbx)}{\Psi_\mu(bx)}\Psi(bx).$$

$\tilde{\varphi}_n(ax)$ *und* $\tilde{\Psi}_{-n}(bx)$ *sind also wieder q-Potenzen. (Man beachte* $[-n] = -q^{-n}[n]$.)

Beweis:

$$\text{(i)} \quad \tilde{\varphi}'_n(ax) = a\,\frac{\varphi'_{n+\lambda}(ax)\varphi_\lambda(ax) - \varphi_{n+\lambda}(ax)\varphi'_\lambda(ax)}{\varphi_\lambda(ax)\varphi_\lambda(qax)}.$$

(wegen (3))

$$\Rightarrow \frac{1}{[n]}\frac{\tilde{\varphi}'_n(ax)}{\tilde{\varphi}_n(ax)} = \frac{a}{[n]}\frac{\varphi'_{n+\lambda}(ax)}{\varphi_{n+\lambda}(ax)}\frac{\varphi_\lambda(ax)}{\varphi_\lambda(qax)} - \frac{a}{[n]}\frac{\varphi'_\lambda(ax)}{\varphi_\lambda(qax)}$$

$$= a\,\frac{[n+\lambda]}{[n]}\varphi(ax)\frac{\varphi_\lambda(ax)}{\varphi_\lambda(qax)} - a\,\frac{[\lambda]}{[n]}\varphi(ax)\frac{\varphi_\lambda(ax)}{\varphi_\lambda(qax)}$$

$$= a\,\varphi(ax)\frac{\varphi_\lambda(ax)}{\varphi_\lambda(qax)}\frac{[n+\lambda]-[\lambda]}{[n]}$$

$$= aq^\lambda\varphi(ax)\frac{\varphi_\lambda(ax)}{\varphi_\lambda(qax)}.$$

(ii) $$\tilde{\Psi}'_n(bx) = b\,\frac{\Psi'_{n+\mu}(bx)\Psi_\mu(qbx)-\Psi_{n+\mu}(qbx)\Psi'_\mu(bx)}{\Psi_\mu(bx)\Psi_\mu(qbx)}$$

(wegen (3)).

Der Rest ist analog zu (i).

<u>Beweis von Satz 4:</u>

Wie man leicht sieht, gilt Satz 3 auch etwas allgemeiner für $\alpha_n(o) = \beta_n(o)$ an Stelle von $\alpha_n(o) = \beta_n(o) = 1$ (wegen Lemma 1 (iii)).

Wir formen (24) um zu

$$\varphi_\lambda(ax)\Psi_\mu(bx)g(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!}\,\frac{x^k}{\dfrac{\varphi_{k+\lambda}(ax)}{\varphi_\lambda(ax)}\;\dfrac{\Psi_{k+\mu}(bx)}{\Psi_\mu(bx)}}\,.$$

Dann sind mit

$$\alpha_k(x) = \frac{\varphi_{k+\lambda}(ax)}{\varphi_\lambda(ax)}\cdot\frac{\Psi_{k+\mu}(bx)}{\Psi_\mu(bx)} = \tilde{\varphi}_k(x)\tilde{\Psi}_k(x)$$

und $$\beta_k(x) = \frac{\varphi_{k+\lambda}(ax)}{\varphi_\lambda(ax)}\cdot\frac{\Psi_{k+\mu}(qbx)}{\Psi_\mu(qbx)} = \tilde{\varphi}_k(x)\tilde{\Psi}_k(qx)$$

alle Voraussetzungen von Satz 3 (jetzt mit $\alpha_n(o) = \beta_n(o)$) bzw. von Spezialfall c) (17) (mit vertauschten $\tilde{\varphi}_k$ und $\tilde{\Psi}_k$) wegen Lemma 4 erfüllt. Daraus folgt alles.

Nun sind die Theoreme (22) und (23) klar:

Wegen $(x)'_n = -[n](qx)_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{[n]}\,\frac{(x)'_n}{(x)_n} = -\frac{1}{1-x}$

und $((1-\frac{x}{q})(1-\frac{x}{q^2})\dots(1-\frac{x}{q^n}))' = (x)'_{-n} = -q^{-n}[n](qx)_{-n}\frac{1}{1-x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{q^n}{[n]}\frac{(x)'_{-n}}{(qx)_{-n}} = -\frac{1}{1-x}$$

erhalten wir (22) aus Satz 4 mit $\lambda = \mu = o$,

$$g(x) = \frac{(x)_\infty}{(Ax)_\infty} f(x),\ a = A,\ b = 1,\ \varphi_k(x) = (x)_k, \Psi_k(x) = (x)_{-k}$$

und (23) mit $\lambda = 2$, $\mu = o$,

$$g(x) = \frac{(x)_\infty}{(Ax)_\infty}\frac{f(x)}{1-qAx^2},\ a = A,\ b = 1,\ \varphi_k(x) = (x)_k,\ \Psi_k(x) = (x)_{-k}.$$

Ebenso könnte der dritte "geschlossene" Spezialfall in [7, Th. 3.3] durch Satz 4 behandelt werden.

Das allgemeine Theorem dieser Arbeit [7, Th. 3.7] scheint für einen Ansatz dieser Art zu unhandlich zu sein, jedoch gibt Hofbauer in [9] einen interessanten Beweis davon, der auf Matrixinversion verzichtet.

Allerdings scheint mit dem vorliegenden Zugang, ein von Gessel und Stanton in [7] gestelltes Problem, nämlich einige ihrer Theoreme in eine allgemeine Theorie einzubetten, einigermaßen befriedigend aufgegriffen zu sein.

Ein zweiter Beweis von Satz 1

Sei wieder $f(x) \in L_o$ gegeben und mit $\alpha_k(x) \in \mathcal{R}_o$

$$(28) \quad f(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} \frac{x^k}{\alpha_k(x)} \quad (c_o = f(o), \alpha_o(x) \equiv 1).$$

Hätten wir eine Basisfolge $p_n(x)$ von Polynomen n-ten Grades mit

$$Lg_k(D)p_n(x) = [n]!\delta_{n,k} ,$$

so wäre

$$(29) \qquad c_n = Lf(D)p_n(x) \qquad (n \geqslant 1) .$$

$$(Lf(D)p_n(x) = L \sum_{k=o}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k(D)p_n(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} [k]!\delta_{n,k} = c_n)$$

Diese Idee beruht im Grunde auf Rotas Theorie der Polynome vom Binomialtyp. (Siehe dazu etwa Cigler [2], [4] oder Hofbauer [9].) Wir können sie jedoch auch im Fall $q \neq 1$ adaptieren: Für eine geeignete Folge $\beta_n(x) \in \mathcal{R}_o$, d.h. $\beta_o(x) \equiv 1$ und ($\alpha_n(x)$ wie in (28)) $\beta_n(o) = \alpha_n(o)$, definieren wir die Folge $p_n(x)$ rekursiv so:

Sei $h_n(x) = \dfrac{x^n}{\beta_n(x)}$, dann sei $p_o(x) \equiv 1$ und für $n \geqslant 1$

$$(30) \qquad p_n(x) = x\beta_n(D)x^{n-1} - [n-1]! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{p_k(x)}{[k]!} M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right).$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, sind die $p_n(x)$ Polynome n-ten Grades.

Nun können wir folgenden Satz behaupten:

Satz 5:

Sei $g_k(x) = \frac{x^k}{\alpha_k(x)}$ *mit* $\alpha_k(x) \in \mathcal{R}_o$, $\alpha_o(x) \equiv 1$ *und die Folge der Polynome* $p_n(x)$ *wie oben definiert. Dann gilt*

$$Lg_k(D)p_n(x) = [n]!\ \delta_{n,k}\ .$$

Beweis:

Für $k > n$ ist $Lg_k(D)p_n(x) = L\frac{D^k}{\alpha_k(D)}p_n(x) = o$ (da grad $p_n(x) = n$).

$\Rightarrow$ Zu zeigen ist: $Lg_k(D)p_n(x) = [n]!\delta_{n,k}$ für $o \leqslant k \leqslant n$.

Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion nach n.

Der Fall $n = o$ ist klar.

Ist $n = 1$, so haben wir:

$$Lg_k(D)x\beta_1(D)1 = \beta_1(o)Lg_k(D)x$$

$$= \begin{cases} o, & k = o \\ \frac{\beta_1(o)}{\alpha_1(o)} = 1, & k = 1. \end{cases}$$

Angenommen $Lg_k(D)p_m(x) = [m]!\delta_{m,k}$ für alle m mit $o \leqslant m < n$:

$$Lg_k(D)p_n(x) = Lg_k(D)x\beta_n(D)x^{n-1} - [n-1]!\sum_{m=1}^{n-1} M\left(\frac{g_m'(x)}{h_n(x)}\right)\frac{Lg_k(D)p_m(x)}{[m]!}$$

$$= Lg_k(D)x\beta_n(D)x^{n-1} - [n-1]!\sum_{m=1}^{n-1} M\left(\frac{g_m'(x)}{h_n(x)}\right)\delta_{m,k}$$

$$= \begin{cases} Lg_n(D)x\beta_n(D)x^{n-1}, & k = n \\ Lg_k(D)x\beta_n(D)x^{n-1} - [n-1]!M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right), & k < n \end{cases}$$

Nun ist $Lg_k(D)x\beta_n(D)x^{n-1} = Lg_k'(D)\beta_n(D)x^{n-1}$

$$= LD^{n-1}g_k'(x)\beta_n(x)$$

$$= [n-1]!M\left(\frac{g_k'(x)\beta_n(x)}{x^n}\right)$$

(Lemma 1 (v))

$$= [n-1]!M\left(\frac{g_k'(x)}{h_n(x)}\right).$$

Für $k = n$ ist daher $Lg_n(D)x\beta_n(D)x^{n-1} = [n-1]!M\left(\frac{g_n'(x)}{h_n(x)}\right)$

$$= [n]!$$

(Lemma 1 (iii)).

Daraus folgt die Behauptung.

Aus dem Satz 5 zusammen mit (29) ergibt sich nun sofort die Behauptung von Satz 1.

In [4] stellte Cigler folgendes Problem:

Man bestimme alle Folgen $\alpha_k(x)$, für welche

$$L\frac{D^k}{\alpha_k(D)}x\alpha_n(D)x^{n-1} = [n]!\delta_{n,k} \tag{31}$$

gilt, wie in den klassischen Spezialfällen der q-Lagrangeformeln von Carlitz und Jackson.

Hofbauer gibt dafür in [8] eine hinreichende Bedingung - auf der Grundlage der q-Potenzen - an.

Aus den vorangegangenen Überlegungen und mit Satz 1 können wir eine notwendige Bedingung angeben, die Hofbauers Kriterium umfaßt, nämlich:

(31) gilt für genau jene Folgen $\alpha_k(x) \in \mathcal{R}_o(\alpha_o(x) \equiv 1)$, die

(32) $$M\left(\frac{g_k'(x)}{g_n(x)}\right) = o \quad \text{für } 1 \leqslant k < n$$

erfüllen, wobei $g_k(x) = \frac{x^k}{\alpha_k(x)}$.

<u>Zum Zusammenhang mit der Matrixinversion</u>

(Zur Betrachtung des Lagrangeproblems als Matrixinversion siehe z.B. Gessel-Stanton [7].)

Sei $f(x) = \sum_{l=o}^{\infty} f_l x^l \in L_o$ gegeben und

(33) $$f(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k(x) ,$$

wobei $g_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} g_{n,k} x^n$ und (o.B.d.A.) $g_{k,k} = 1$.

Dann ist für $g_k(x) = \frac{x^k}{\alpha_k(x)}$: $\alpha_k(x) = \frac{1}{\sum_{n=o}^{\infty} g_{n+k,k} x^n}$

Wir benötigen wieder eine Hilfsfolge $h_{n+1}(x) = x \cdot \frac{x^n}{\beta_n(x)}$ $(n=o,1,\ldots)$

mit $\beta_n(x) \in \mathcal{R}_o$ und $\beta_n(o) = 1$, ansonsten beliebig.
Multiplikation von beiden Seiten von (33) mit $\frac{1}{h_{n+1}(x)}$ und Anwendung von M auf beiden Seiten liefert

$$M\left(\frac{f(x)}{h_{n+1}(x)}\right) = \sum_{k=o}^{n} \frac{c_k}{[k]!} M\left(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}\right) + M\left(\frac{1}{h_{n+1}(x)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k(x)\right)$$

$$(34) \qquad = \sum_{k=o}^{n} \frac{c_k}{[k]!} M\left(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}\right)$$

(Lemma 1 (ii))

$$= \frac{c_n}{[n]!} + \sum_{k=o}^{n-1} \frac{c_k}{[k]!} M\left(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}\right)$$

(Lemma 1 (i)).

Wegen Lemma 1 (v) ist

$$(35) \qquad [n]!\, M\left(\frac{f(x)}{h_{n+1}(x)}\right) = LD^n f(x)\, \beta_n(x)$$

und wir erhalten den

<u>Satz 6:</u>
Sei $g_k(x) = \frac{x^k}{\alpha_k(x)}$ *mit* $\alpha_k(x) \in \mathcal{R}_o$ *und* $\alpha_k(o) = 1$, *und* $h_{k+1}(x) = x\frac{x^k}{\beta_k(x)}$ *mit* $\beta_k(x) \in \mathcal{R}_o$ *und* $\beta_k(o) = 1$ *für* $k = o, 1, \ldots$.
So gilt bei gegebenem $f(x) \in L_o$ *für die Koeffizienten* c_n *der Darstellung*

$$f(x) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k(x)$$

(36) $$c_n = LD^n f(x)\beta_n(x) - [n]! \sum_{k=o}^{n-1} \frac{c_k}{[k]!} M\left(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}\right) .$$

Ist dabei

(37) $$M\left(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}\right) = o \text{ für } 0 \leqslant k < n ,$$

so gilt

(38) $$c_n = LD^n f(x)\beta_n(x) .$$

<u>Bemerkung:</u>

(38) ist also eine zweite Variante zur 2. Version der q-Lagrangeformel. (Vgl. Satz 1.)

Als Beispiel für eine Anwendung dieser Formulierung des Lagrangeschen Inversionsproblems wollen wir das q-*Analogon von Garsia* [6] betrachten. Gegeben sei ($f(x) \in L_o$)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k(x) \text{ mit } g_k(x) = g(x)g(qx)\ldots g(q^{k-1}x)$$

und $g(x) = \frac{x}{\alpha(x)}$, $\alpha(x) \in \mathcal{R}_o$.

Wie findet man nun ein geeignetes $h_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{\beta_n(x)}$, um

(39) $$M\left(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}\right) = \delta_{k,n} \quad (1 \leqslant k \leqslant n)$$ zu erreichen?

Naheliegend ist der unbestimmte Ansatz

$$h_{n+1}(x) = \varphi(x) g_{n+1}(x)$$

für ein $\varphi(x) \in \mathcal{R}_o$. Aus technischen Gründen setzen wir

(40) $$h_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{\beta_n(x)} = \frac{g_{n+1}(x)}{q^n \psi(q^n x)}$$ für ein zunächst

unbestimmtes $\psi(x) \in \mathcal{R}_o$. Nun ist

$$M\left(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}\right) = q^n\, M\left(\psi(q^n x)\, \frac{g(x)g(qx)\ldots g(q^{k-1}x)}{g(x)g(qx)\ldots g(q^n x)}\right)$$

$$= q^n\, M\left(\frac{\psi(q^n x)}{g(q^k x)\ldots g(q^n x)}\right)$$

$$= M\left(\frac{\psi(x)}{g(x)g(\frac{x}{q})\ldots g(\frac{x}{q^{n-k}})}\right)$$

(wegen $M\alpha(cx) = \frac{1}{c} M\alpha(x)$ für $\alpha \in L$, $c \neq o$).

Um (39) zu garantieren, muß nun ein $\psi(x) \in \mathcal{R}_o$ existieren, s.d.

(41) $$M\left(\frac{\psi(x)}{g(x)g(\frac{x}{q})\ldots g(\frac{x}{q^m})}\right) = \delta_{m,o}$$ für alle $m = o,1,\ldots$.

Das ist tatsächlich der Fall, denn (41) ist äquivalent zu

(42) $$\langle x^m \rangle \psi(x)\alpha(x)\alpha(\frac{x}{q})\ldots\alpha(\frac{x}{q^m}) = \delta_{m,o} \quad (m = o,1,\ldots),$$

woraus sich die Koeffizienten von $\psi(x)$ rekursiv ermitteln lassen. Daraus folgt auch sofort, daß $\psi(x) \in \mathcal{R}_o$ *eindeutig* bestimmt ist.

Aus (34) und (35) folgt nun - wegen (39) und (40):

Für die Koeffizienten c_n *der Entwicklung* $(f(x) \in L_o)$ $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{[k]!} g_k(x)$ *mit* $g_k(x) = g(x)g(qx)\ldots g(q^{k-1}x)$ *und* $g(x) = \frac{x}{\alpha(x)}$, $\alpha(x) \in \mathcal{R}_o$, *existiert eindeutig das durch* (42) *bestimmte* $\Psi(x) \in \mathcal{R}_o$, *so daß* $c_n = LD^n f(x)\beta_n(x)$ *mit* $\beta_n(x) = q^{-\binom{n}{2}}\Psi(q^n x)\alpha(x)\alpha(qx)\ldots\alpha(q^n x)$. (Garsia [6].)

Abschließend möchten wir den Zusammenhang der vorliegenden Betrachtungsweise mit der Matrizeninversion skizzieren. Bei diesen Überlegungen können wir uns aus bereits bekannten Gründen auf die Betrachtung der $\beta_n(x)$ (von Satz 6) als Polynome n-ten Grades beschränken.

Wie man leicht überlegen kann, existiert unter dieser Voraussetzung zur vorgegebenen Folge $g_k(x) = \frac{x^k}{\alpha_k(x)}$ mit $\alpha_k(o) = 1$ $(k = o,1,\ldots)$ die eindeutig bestimmte Folge von Polynomen n-ten Grades $\beta_n(x)$ $(n = o,1,\ldots)$ mit $\beta_n(o) = 1$, so daß für $h_{n+1}(x) = x\,\frac{x^n}{\beta_n(x)}$

$$M\left(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}\right) = \delta_{n,k}$$

gilt.

Wir schreiben $\beta_n(x) = \sum_{l=o}^{\infty} \beta_{n,l}x^l$ $(\beta_{n,o} = 1)$

und $g_k(x) = x^k \sum_{l=o}^{\infty} g_{l+k,k}x^l$ $(g_{k,k} = 1)$.

$$\Rightarrow \quad M\left(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}\right) = \sum_{l=k}^{n} g_{l,k}\beta_{n,n-l} \text{ , d.h.}$$

$$(43) \quad \delta_{n,k} = \sum_{l=o}^{n} g_{n,l}^{-1} g_{l,k} \quad ,$$

indem wir $\beta_{n,n-l} = g_{n,l}^{-1}$ setzen.

(Und unter Beachtung der verträglichen Erweiterungen $g_{l,k} = o$ falls $l < k$, und $g_{n,l}^{-1} = o$ falls $l > n$.)

Gleichung (43) entspricht dann folgender Matrizengleichung mit unendlichen Dreiecksmatrizen (I = unendl. Einheitsmatrix):

$$A^{-1}A = I, \text{ wobei}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} g_{o,o}^{-1} & o & o & o & \cdots & o & o & \cdots \\ g_{1,o}^{-1} & g_{1,1}^{-1} & o & o & \cdots & o & o & \cdots \\ g_{2,o}^{-1} & g_{2,1}^{-1} & g_{2,2}^{-1} & o & \cdots & o & o & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \\ g_{n,o}^{-1} & g_{n,1}^{-1} & g_{n,2}^{-1} & g_{n,3}^{-1} & \cdots & g_{n,n}^{-1} & o & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} g_{o,o} & o & o & o & \cdots & o & o & \cdots \\ g_{1,o} & g_{1,1} & & o & \cdots & o & o & \cdots \\ g_{2,o} & g_{2,1} & g_{2,2} & o & \cdots & o & o & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ g_{n,o} & g_{n,1} & g_{n,2} & g_{n,3} & \cdots & g_{n,n} & o & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

mit $g_{j,j}^{-1} = g_{j,j} = 1$ $(j = o,1,\ldots)$.

Wir sehen also:

Die Koeffizienten der, durch die Bedingungen $M(\frac{g_k(x)}{h_{n+1}(x)}) = o$ *für* $o \leqslant k < n$ *eindeutig bestimmten Polynome* $\beta_n(x)$,

$$\beta_n(x) = \beta_{n,o} + \beta_{n,1}x + \ldots + \beta_{n,n}x^n$$

$$= g_{n,n}^{-1} + g_{n,n-1}^{-1}x + \ldots + g_{n,o}^{-1}x^n ,$$

liefern also die Inverse A^{-1} *zu der, durch die Potenzreihen-Folge* $\alpha_k(x)$ *bestimmten Ausgangsmatrix* A.

Analog dazu läßt sich auch der durch Satz 1 bestimmte Sachverhalt der 1. Version der q-Lagrangeformel interpretieren.

<u>Abschließende Bemerkung</u>

Wichtige Grundideen zur vorliegenden Arbeit wurden durch die Vorlesung "Kombinatorische Identitäten" von Prof. Cigler (Wien, WS 1981/82) motiviert.

L i t e r a t u r:

[1] G.E. ANDREWS: Identities in combinatorics II: A q-analog of the Lagrange inversion theorem. Proc. AMS 53, 240-245 (1975).

[2] J. CIGLER: Sequences of polynomials of binomial type and the Lagrange-Good formula. Preprint, Wien 1977.

[3] -: Operatorenmethoden für q-Identitäten. Mh. Math. 88, 87-105 (1979).

[4] -: Operatorenmethoden für q-Identitäten III: Umbrale Inversion und die Lagrangesche Formel. Arch. Math. 35, 533-543 (1980).

[5] -: Elementare q-Identitäten. Sitzungsbericht des 5. Treffens des Seminaires Lotharingien de Combinatoire in Sainte-Croix-aux-Mines. Publ. IRMA Strasbourg (1982).

[6] A.M. GARSIA: A q-analogue of the Lagrange inversion formula. Houston J. Math. 7, 205-237 (1981).

[7] I. GESSEL, D. STANTON: Applications of q-Lagrange inversion to basic hypergeometric series. Trans. AMS 277 (1983).

[8] J. HOFBAUER: A q-analog of the Lagrange expansion. Arch. Math. 42, 536-544 (1984).

[9] -: Lagrange Inversion. Sitzungsbericht des 6. Treffens des Seminaires Lotharingien de Combinatoire auf Burg Feuerstein. Publ. IRMA Strasbourg (1982).

[10] Ch. KRATTENTHALER: q-Lagrangeformel und inverse Relationen Dissertation, Univ. Wien 1983.

[11] Ch. KRATTENTHALER: A new q-Lagrange formula and some applications. Proc. Amer. Math. Soc. 90, 338-344 (1984).

Derzeitige Adresse des Autors:

Lehrstuhl II für Mathematik
Universität Bayreuth, Postfach 3008
D-8580 Bayreuth