Transformation von Gleichungen n - ter Ordnung in ein Gleichungssystem 1.Ordnung bei linearen gewoehnlichen Differentialgleichungen

verfasst von den Studenten fuer Technische Mathematik an der J.Kepler Universität Linz

Manuela Dörr (MtrNr./SKZ: 0256803/860)
email: manuela.doerr@web.de

Jakob Fuchsbauer (MtrNr./SKZ:0256698/860)
email:jakob.fuchsbauer@gaj-ooe.at

im Mai 2004 fuer Praesentationstechnik

0.1 Abstract :

In diesem Paper wird im folgenden definiert was man unter einem Differentialgleichungssystem 1.Ordnung versteht, dass diese in gekoppelter Form sowie durch Tranformation loesbar sind; des weiteren werden lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung definiert, sowie Homogenitaet erlaeutert, Anfangswertprobleme (AWP) und lineare Operatoren erklaert.

Es folgt eine Definition linearer gewoehnlicher Differentialgleichungen n-ter Ordnung.

Mit diesen Voraussetzungen wird dann der Satz ueber die Transformation von Differentialgleichungen n - ter Ordnung in Differentialgleichungssysteme 1.ter Ordnung angefuehrt und bewiesen. Abschliessend werden noch Beispiele demonstriert sowie auf Spezialfaelle eingegangen.

0.2 Index :

1. Exakte Presentation fuer den Anwender

1.1 Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

1.1.1 Definition von Dgl. - Systeme 1.-ter Ordnung :

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \quad (1) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

mit $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $i \in \{1, \ldots, n\}$

in Vektorschreibweise : $y' = F(x, Y)$

heisst : Differentialgleichungssystem 1. Ordnung (Dgl.−System 1. Ordnung)

gesucht $Y = (y_1, \ldots, y_n)^t : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, I die (1) genuegen.

1.1.2 Beispiel

$$y_1' = y_1^2 + y_2^{10} + e^x$$

$$y_2' = \sin(y_1) + (\cos y_2)^2 + x^2$$

1.1.3 Bemerkung

Loesen laesst sich dieser Fall wenn die
Differentialgleichungen des Systems nicht gekoppelt sind. d.h. im Fall n = 2

$$y_1' = f_1(x, y_1)$$

$$y_2' = f_2(x, y_2)$$

(einfach, da die beiden voneinander unabhaengig sind)
bzw. wenn :

$$y_1' = f_1(x, y_1)$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$$

Neben diesen beiden Faellen laesst sich ein Differentialgleichungssystem manchmal auch mit geeigneter Transformation loesen (zB linearer Fall) d.h. :

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2)$$

$$y_2' = f_2(x, y_1, y_2)$$

durch Substitution von $u_1 = \varphi(y_1, y_2)$ und $u_2 = \psi(y_1, y_2)$
kann das System uebergehen in :

$$u_1' = f_1^*(x, y_1)$$

$$u_2' = f_2^*(x, y_1, y_2)$$

1.1.4 Beispiel

$$y_1' = 3\,y_1 + 2\,y_2$$

$$y_2' = y_1 + 2\,y_2$$

Substitution :

$$u_1 = y_1 + y_2$$

$$u_2 = y_1 - y_2$$

Dgl – System geht ueber in :

$$u_1' = y_1' + y_2' = 4\,y_1 + 4\,y_2 \quad = 4\,u_1$$

$$u_2' = y_1' - y_2' = 2\,y_1 \qquad\qquad = u_1 + u_2$$

1.2 Lineare Differentialgleichungssysteme :

1.2.1 Definition von linearen Dgl. - Systeme :

(Sind die f_i in Definition 1.1 .1 linear in den y_i, d.h.

$$f_i(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y_i + q_i(x)$$

dann spricht man von einem linearen Dgl – System, genauer :)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und fuer alle $1 \le i$ und $j \le n$ $a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und
$A(t) := (a_{ij}(t))$ und $q_i : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

(a) Ein lineares Dgl – System 1. Ordnung der Dimension n
hat die Gestalt :

$$y_1' = a_{11}(t)\, y_1 + \cdots + a_{1n}(t)\, y_n + q_1(t)$$

$$y_2' = a_{21}(t)\, y_1 + \cdots + a_{2n}(t)\, y_n + q_2(t)$$
$$\vdots$$
$$y_n' = a_{n1}(t)\, y_1 + \cdots + a_{nn}(t)\, y_n + q_n(t)$$

<u>kurz :</u> $Y' = A(t)\, Y + Q(t)$

(b) $Y' = A(t)\, Y$ heisst homogenes lineares Dgl – System

(c) $Y' = A(t)\, Y + Q(t)$ heisst inhomogenes lineares Dgl – System

(d) Ist $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ dann heisst $Y' = A(t)\, Y + Q(t)$ mit $Y(t_0) = Y_0$ AWP
(= Anfangswertproblem)

1.2.2 Satz ueber den linearen Operator :

Seien $X, \; Y$ lineare Vektorraeume ueber $\mathbb{R}$
und $L : X \longrightarrow Y$ sei linearer Operator (d.h. lineare Abbildung)
d.h. : $L(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha L(x_1) + \beta L(x_2)$

Dann gilt :

(a) Sind x_0 und y_0 Loesungen der homogenen (Operatoren) Gleichung

$Lx = 0$ (d.h. $Lx_0 = 0$ und $Ly_0 = 0$),
dann ist auch $\alpha x_0 + \beta y_0 \quad \alpha$ und $\beta \in \mathbb{R}$ Loesung der homogenen Gleichung

(b) Ist x_b spezielle Loesung der inhomogenen (Operatoren) Gleichung

$Lx = b$ wobei $b \in y$

dann laesst sich jede Loesung x der inhomogenen Gleichung
$Lx = b$ darstellen in der Form $x = x_b + x_0$
(mit x_0 als Loesung der homogenen Gleichung)

Die Loesungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems bildet eine lineare Mannigfaltigkeit (Spezialfall der linearen Gleichungssysteme erhaelt man fuer $A \in \mathbb{R}^n_n \quad X = \mathbb{R}^n \;, \; Y = \mathbb{R}^n \;, \quad L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \;; \; x \mapsto Ax$)

1.2.3 Beweis:

Sei $L_n^1 : (C^1)^n \longrightarrow (C^0)^n$ mit $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \longrightarrow L_n^1 \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$

bzw. $Y \longrightarrow L_n^1 (Y) = y' \quad Y \in (C^1)^n$

dann laesst sich das inhomogene Differentialgleichungssystem in der Form

$$(L_n^1 - A(t))\, Y = Q(t)$$

und das homogene Dgl − System in der Form

$$(L_n^1 - A(t))\, Y = 0 \qquad \text{schreiben}$$

Da L_n^1 linearer Operator ist,

wegen : $L_n^1(\alpha Y + \beta \tilde{Y}) = (\alpha Y + \beta \tilde{Y})' = \alpha Y' + \beta \tilde{Y}' = \alpha L_n^1(Y) + \beta L_n^1(\tilde{Y})$

gilt Satz fuer die Loesungen des linearen Dgl − Systems

$$Y' = A(t)\, Y + Q(t) \quad bzw \quad Y' = A(t)\, Y$$

1.3 Lineare gewoehnliche Differentialgleichungen n-ter Ordnung

1.3.1 Defintion lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung :

(Sei $n \in \mathbb{N}_0$ für alle $0 \leq i \leq n,\ b_i : I \leq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $q : I \leq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.)

1. Eine lineare Dgl.nter Ordnung hat die Gestalt:

   $$b_n(t)\, y^{(n)} + b_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + b_{n-2}(t)\, y^{(n-2)} + \dots b_1(t)\, y^{(1)} + \quad b_0(t)\, y = \quad q(t)$$

   die hierbei auftretenden Koeffizienten $b_n(t),\ b_{n-1}(t),\ \dots,\ b_1(t),\ b_0(t)$
   und $q(t)$ sind stetig und reellwertig auf dem offenem Intervall I.

2. Ist $q(t) \equiv 0$,dann heißt die Dgl. homogen, ansonsten heißt sie inhomogen.

3. Ist $c_0,\ c_1,\ \dots,\ c_{n-1} \in \mathbb{R}$, dann heißt die Dgl. mit den zusaetzlichen

   Bedingungen $y(t_0) = c_0,\ y^{(1)}(t_0) = c_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$
   d.h. Anfangswertproblem (kurz : AWP).

1.3.2 Bemerkung :

Der Operator $L^n : C^n(I) \rightarrow C^0(I)$ mit

$$y \mapsto L^n(y) = b_n(t)\, y^{(n)} + b_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + b_{n-2}(t)\, y^{(n-2)} + \dots + b_1(t)\, y^{(1)} + b_0(t)\, y$$

ist linear und für alle Loesungen der homogenen Dgl. n-ter Ordnung $L_y^n = 0$, bzw. der inhomogenen Dgl. $L_y^n = q$ gilt der Satz der linearen Vektorraeume.

1.3.3 Satz zur Transformation Dgl n-ter Ordnung in ein Dgl-System 1.ter Ordnung :

Sei das Dgl.-sysem n-ter Ordnung wie in der Definiton 1.3.2 gegeben.

$$b_n(t)\,y^{(n)} + b_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + b_{n-2}(t)\,y^{(n-2)} + \ldots .b_1(t)\,y^{(1)} + b_0(t)\,y = q(t),$$

so ist das N-dimensionale Dgl n-ter Ordnung gleichwertig zum n*N-dimensionalen System 1.ter Ordnung :

$$\begin{aligned}
y_1'(t) &= y_2(t)\\
y_2'(t) &= y_3(t)\\
&\;.\\
&\;.\\
y_{n-1}'(t) &= y_n(t)\\
y_n'(t) &= -\frac{1}{b_n(t)}\left(b_0(t)y_1 + b_1(t)y_2 + \ldots + b_{n-2}(t)y_{n-1} + b_{n-1}(t)y_n + q(t)\right)
\end{aligned}$$

mit $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n \in \mathbb{R}^n$

in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ . \\ . \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ -\frac{b_0(t)}{b_n(t)} & -\frac{b_1(t)}{b_n(t)} & . & . & -\frac{b_{n-1}(t)}{b_n(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ -\frac{q(t)}{b_n(t)} \end{pmatrix}$$

1) Ist $\lambda(t)$ eine Loesung des Dgl. n-ter Ordnung so ist $\lambda(t),\ \lambda^{(1)}(t),\ \ldots,\ \lambda^{(n-2)}(t),\ \lambda^{(n-1)}(t)$ eine Loesung des Dgl.System 1.ter Ordnung.

2) Ist $\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_{n-1}(t), \mu_n(t)$ eine Loesung des Dgl.-System 1.ter Ordnung, so ist $\mu_1(t)$ eine Loesung von dem Dgl.-System n.ter Ordnung.

Sei $c_0, c_1, .., c_{n-1} \in \mathbb{R}$ eine Loesung der Dgl. n.ter Ordnung der Anfangswertbedingung mit:

$$y(t_0) = c_0,\ y^{(1)}(t_0) = c_1,\ ...,\ y^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}.$$

So erfuellt die zugehoerige Loesung des Dgl.-Systems 1.ter Ordnung die Anfangsbedingung:

$$y_1(t_0) = c_0,\ y_2(t_0) = c_1,\ ...,\ y_n(t_0) = c_{n-1}$$

und umgekehrt.

1.3.4 Beweis:

Sei die Dgl. n-ter Ordnung in folgender Form:

$$b_n(t)\,y^{(n)} + b_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + b_{n-2}(t)\,y^{(n-2)} + ...b_1(t)\,y^{(1)} + b_0(t)\,y = q(t)$$

1)
Sei nun λ(t) eine Loesung des Dgl.-Systems n.ter Ordnung,so gilt auf dem zughoerigem Loesungsintervall:

$$\lambda^{(n)}(t) \equiv -\frac{1}{b_n(t)}(b_0(t)\,\lambda + b_1(t)\,\lambda^{(1)} + ... + b_{n-2}(t)\,\lambda^{(n-2)} + b_{n-1}(t)\,\lambda^{(n-1)} + q(t))$$

Setzt man $(\mu_1(t), \mu_2(t), ..., \mu_{n-1}(t), \mu_n(t)) := (\lambda(t), \lambda^{(1)}(t), ..., \lambda^{(n-2)}(t), \lambda^{(n-1)}(t))$
so folgt hieraus :

$$\mu_1'(t) \equiv \mu_2(t),\ \ \mu_2'(t) \equiv \mu_3(t),\ ...,\ \ \mu_{n-2}'(t) \equiv \mu_{n-1}(t),\ \ \mu_{n-1}'(t) \equiv \mu_n(t)\ \ \text{und}$$

$$\mu_n'(t) \equiv -\frac{1}{b_n(t)}(b_0(t)\,\lambda + b_1(t)\,\lambda^{(1)} + ... + b_{n-2}(t)\,\lambda^{(n-2)} + b_{n-1}(t)\,\lambda^{(n-1)} + q(t))$$

und somit auch

$$\mu_n'(t) \equiv -\frac{1}{b_n(t)}(b_0(t)\,\mu_1 + b_1(t)\,\mu_2 + ... + b_{n-1}(t)\,\mu_{n-1},\ b_n(t)\,\mu_n + q(t)).$$

Dies besagt,daß $\mu_1(t),\ \mu_2(t),\ ...,\ \mu_{n-1}(t),\ \mu_n(t)$ eine Loesung des Dgl.-Systems 1.ter Ordnung ist. Erfuellt nun $\lambda(t)$ die Anfangswertbedingung aus dem Satz,so genuegt daß $\mu_1(t),\ \mu_2(t),\ ...,\ \mu_{n-1}(t),\ \mu_n(t)$ die Anfangswertbedingung erfuellt.

2)
Sei nun $\mu_1(t),\ \mu_2(t),\ ...,\ \mu_{n-1}(t),\ \mu_n(t)$ eine Loesung des Dgl.-Systems 1.ter Ordnung,es gelte also:

$$\mu_1{}'(t) \equiv \mu_2(t),\ \mu_2{}'(t) \equiv \mu_3(t),\ ...,\ \mu_{n-2}{}'(t) \equiv \mu_{n-1}(t),\ \mu_{n-1}{}'(t) \equiv \mu_n(t)$$

$$\mu_n{}'(t) \equiv -\frac{1}{b_n(t)}\left(b_0(t)\ \mu_1 + b_1(t)\ \mu_2 + ... + b_{n-1}(t)\ \mu_{n-1},\ b_n(t)\ \mu_n + q(t) \right)$$

Daraus ergibt sich:

$$\mu_1{}'(t) \equiv \mu_2(t),\ \mu_1{}^{(2)}(t) \equiv \mu_3(t),\ ...,\ \mu_1{}^{(n-2)}(t) \equiv \mu_{n-1}(t),\ \mu_1{}^{(n-1)}(t) \equiv \mu_n(t) \quad (*)$$

und schliesslich:

$$\mu_1{}^{(n)}(t) \equiv \mu_n{}'(t)$$

$$\equiv -\frac{1}{b_n(t)}\left(b_0(t)\ \mu_1 + b_1(t)\ \mu_2 + ... + b_{n-1}(t)\ \mu_{n-1} + b_n(t)\ \mu_n + q(t) \right)$$

$$\equiv -\frac{1}{b_n(t)}\left(b_0(t)\ \mu_1 + b_1(t)\ \mu_1{}' + ... + b_{n-1}(t)\ \mu_1{}^{(n-2)}(t) + b_n(t)\mu_1{}^{(n-1)}(t) + q(t) \right)$$

Also ist $\mu_1(t)$ eine Loesung des Dgl.-Systems n.ter Ordnung.
Genuegt die Funktion

$$-\frac{1}{b_n(t)}\left(b_0(t)\ \mu_1 + b_1(t)\ \mu_2 + ... + b_{n-1}(t)\ \mu_{n-1} + b_n(t)\ \mu_n + q(t) \right)$$

der Anfangswertbedingung 1.ter
Ordnung, so erfuellt $\mu_1(t)$ wegen (*) die Anfangswertbedingung n-ter Ordnung.

2. Detailierte Information fuer Experten

2.1 Spezialfall :

$y^{(2)} = F(x, y')$, d.h. y tritt nicht auf

Loesungsmethode anhand eines Beispiels:

$$y^{(2)} - y' = x$$

Setze : $z = y'$,
dann gilt: $z' - z = x$, besitzt die Loesung $z(x) = c_1\ e^x - (1 + x)$,
also: $y(x) = \int c_1\, e^x - (1 + x)\ dx + c_2 = c_1\ e^x - \frac{(1+x)^2}{2}\ dx + c_2$,

2.2 Spezialfall :

$y^{(2)} = F(y, y')$, d.h. x tritt nicht auf.

Loesungsmethode :

Setze $y'(x) = v(y(x)) \Longrightarrow y^{(2)} = v'\ (y(x)) * y'(x) = v'(y) * v(y)$
und Dgl. geht ueber in

$$v'(y) * v(y) = F(y,v) \ \text{ und } y'(x) = v(y(x)).$$

Beispiel:

$$y'' + k^2\, y = 0$$

mit oben angefuehrter Substitution folgt:

$$v' v = - k^2\, y$$

$$v' = - k^2\, y\ \frac{1}{v}$$

$$\frac{dv}{dy} = -\,k^2\ y\ \frac{1}{v}$$

$$\int v\, dv = \int -k^2\ y\, dy$$

$$\int v\, dv = \int -k^2\ y\, dy + c$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{-k^2\ y}{2} + c$$

$$v = \pm\, k\, \sqrt{c_1{}^2 - y^2}$$

d.h. :

$$y' = \pm\, k\, \sqrt{c_1{}^2 - y^2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{c_1{}^2 - y^2}}\, dy = \int \pm\, k\, dx$$

$$\arcsin\left(\frac{y}{c_1}\right) = \pm\, k + c_2$$

$$y = c_1 \sin(\pm\, k + c_2)$$

2.3 weitere Beispiele :

Fuehren Sie die Dgl. $y''' + (1+ \sin^2 x)\, y'' + x^2 y' + e^{-x} y = 0$ in ein System von Dgl. 1.ter Ordnung ueber.

$$
\begin{aligned}
&(y_1 = y)\\
&y_1' = y_2,\\
&y_2' = y_3\\
&y_3' = -((1 + \sin^2 x)\, y_3 + x^2\, y_2 + e^{-x}\, y_1)
\end{aligned}
$$

d.h. :

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^{-x} & -x^2 & -1 - \sin^2 x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Umkehrung :

Dgl. System 1.-ter Ordnung in eine Dgl höherer Ordnung umschreiben.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

d.h. :

$y_1' = y_2,\ y_2' = y_3,\ y_3' = y_1$ mit $y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y''$ folgt :
$y''' = y$ bzw. $y''' - y = 0$

Loesung :

charakteristisches Polynom (char. Pol.) : $\lambda^3 - 1 = 0$
die Nullstellen des char. Pol. : $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2},\ \lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$;
Fundamentalsystem (FS) : $\{\, e^x,\ e^{-\frac{x}{2}} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x),\ e^{-\frac{x}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \,\}$
Loesungen sind nun alle linearkombinationen der linear unabhaegigen Funktionen des Fundamentalsystems.

3. Literaturnachweis

Quellenangabe :

[1] Lehrveranstaltungs Inhalte von :
Gewoehnliche Differentialgleichungen (WS 2003 / 2004) Vorlesender :
Peherstorfer Franz,
Dr., A. Univ.- Prof. vom Institut für Analysis und Numerik der Johannes Kepler Universität Linz.

[2] Prof. Dr. Bernd Aulbach : Gewoehnliche Differentialgleichungen, Spektrum, Akadem. Verl. Berlin 1997