Mengenlehre vs Kategorientheorie

Josef Schicho, JKU, RISC

11.Juni 2024

Mengen als Bausteine der Mathematik

Grundproblem: Objekte in der Mathematik, über die man Aussagen treffen will (Sätze beweisen, Fragen formulieren), müssen unmissverständlich definiert werden.

Beispiele für solche Objekte: Vektorräume, Funktionen, topologische Räume, ...

Antwort der Mengenlehre: Jedes Ding ist eine Menge.

Beispiele von Definitionen

- Es seien A und B Mengen. Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Teilmenge der Produktmenge $A \times B$, die eine bestimmte Eigenschaft hat (Voreindeutigkeit).
- Es seien a, b Dinge (nachdem jedes Ding eine Menge ist, sind a und b Mengen, aber das ist für diese Definition unwichtig). Das *Paar* (a, b) ist die Menge $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.
  Die Produktmenge zweier Mengen A und B ist die Menge aller Paare (a, b) sodass $a \in A$ und $b \in B$ ist.
- Die *natürlichen Zahlen* definieren wir rekursiv: 0 ist definiert als die leere Menge $\emptyset$, und der Nachfolger der Menge n (also $n + 1$) ist definiert als die Menge $n \cup \{n\}$.

$$1 = \{\emptyset\}, 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \ldots$$

Weitere Beispiele

Sowohl Paare als auch natürliche Zahlen kann man anders defininieren, z.B. $n+1 := \{n\}$. Welche von den Definitionen gewählt wird, macht kaum einen Unterschied in den späteren Aussagen. Es muss nur gewährleistet sein, dass zwei unterschiedliche Dinge niemals die gleiche Menge sind.

- Es sei A eine Menge. Eine Relation auf A ist eine beliebige Teilmenge von $A \times A$. Eine *Equivalenzrelation* ist eine Relation, die symmetrisch, reflexiv und transitiv ist.
  Die *Equivalenzklasse* von $a \in A$ bezüglich einer Equivalenzrelation $\sim$ ist die Menge $\{b \mid a \ \sim b\}$.
  Die *Quotientenmenge* ist die Menge aller Equivalenzklassen.
- Die Menge $\mathbb{N}$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$.
- Die Menge $\mathbb{Z}$ ist die Quotientenmenge der Menge von Paaren in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bezüglich der Equivalenzrelation $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.

Axiome der Mengenlehre

- $\emptyset$ existiert.
- Wenn a und b existieren, dann existiert $\{a, b\} = \{b, a\}$.
- Für Menge A und jede Eigenschaft existiert die Teilmenge aller Elemente von A, die Eigenschaft besitzen.
- Es existiert eine Menge $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $a \in \mathbb{N} \implies (a \cup \{a\}) \in \mathbb{N}$.
- Jede Menge besitzt eine Potenzmenge.
- Für jede Menge A, deren Elemente disjunkte und nichtleere Mengen sind, existiert eine Menge, die mit jeder Element-Menge genau ein Element gemeinsam hat.

Problematik des Auswahlaxioms

Für all Existenzaussagen in den Axiomen ausser dem letzten gilt nicht nur Existenz, sondern auch die Eindeutigkeit. Das bedeutet, dass man jede Menge, deren Existenz durch diese Axiome bewiesen wird, in einer einfachen Symbolsprache mit den Buchstaben $\{, \}, |, \in, \mathcal{P}, \mathbb{N}$ hinschreiben kann: jedes Ding in der Mathematik ist eine solche Zeichenkette.

Die Auswahlmenge ist leider nicht eindeutig. Daher kann man für die Auswahlmenge kein Symbol definieren, das eine eindeutige Menge beschreibt. Mengen, die nur wegen dem Auswahlaxiom existieren, lassen sich mannchmal nicht hinschreiben.

Beispiel: Es sei $\sim \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ die Equivalenzrelation $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$. Die Quotientenmenge besitzt eine Auswahlmenge, die aus jeder Klasse genau eine Zahl hat. Man kann aber so eine Menge nicht hinschreiben.

Kategorien

Das Hauptanliegen der Kategorientheorie ist, eine Sprache herzustellen, die Mathematikern und Mathematikerinnen hilft, mathematische Zusammenhänge klar zu verstehen, Beweise übersichtlich zu organisieren, Fragestellungen einzuordnen. Mengenlehre wird (von den meisten Autoren) durchaus verwendet, aber sie ist nicht die Sprache in der mathematische Sätze ausgedrückt werden sollen.

Eine Kategorie besteht aus einer Klasse $\mathcal{C}$ von Objekten und zu je zwei Objekten $A, B \in \mathcal{C}$ eine Menge $\mathrm{Mor}(A, B)$ von Morphismen. Die Liste der Axiome ist kurz.

- Zu drei Objekten A, B, C gibt es eine Verknüpfungsoperation $\circ : (\mathrm{Mor}(B, C) \times \mathrm{Mor}(A, B)) \to \mathrm{Mor}(A, C)$. Diese ist assoziativ: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ für Morphismen $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}(b, c)$, $h \in \mathrm{Mor}(c, d)$.
- Zu jedem Objekt A gibt es einen Identitätsmorphimus 1_A, sodass $f \circ 1_A = 1_B \circ f = f$ für alle $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$.

Beispiele

Sets (Paradekategorie) Die Objekte sind Mengen. Für Mengen A, B ist $\mathrm{Mor}(A, B)$ die Menge aller Funkionen von A nach B. Kategorientheoretisch gesehen sind A, B zwei Mengen, die "nichts voneinander wissen", wenn man keinen Morphismus spezifiziert. Es ist auch nicht möglich, A und B zu schneiden oder zu vereinigen.

Vect$_{\mathbb{R}}$ Die Objekte sind Vektorräume über $\mathbb{R}$. Für Vektorräume V, W ist $\mathrm{Mor}(V, W)$ die Menge aller linearen Abbildungen von A nach B.

Top Die Objekte sind topologische Räume. Für topologische Räume X, Y ist $\mathrm{Mor}(X, Y)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von A nach B.

Isomorphisms and Monomorphisms

Es seien $A, B \in \mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Mor}(A, B), g \in \mathrm{Mor}(B, A)$. Wenn $f \circ g = 1_B$ und $g \circ f = 1_A$ ist, dann ist f (und auch g) ein *Isomorphismus*.
In jedem Satz, der in der Sprache der Kategorientheorie formuliert werden kann, ist es möglich, ein beliebiges Objekt durch ein isomorphes Objekt zu ersetzen. Isomorphe Objekte haben daher die gleichen Eigenschaften.

Ein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ heißt *Monomorphismus*, wenn für alle $T \in \mathcal{C}$ und $g_1, g_2 \in \mathrm{Mor}(T, A)$ gilt:
$f \circ g_1 = f \circ g_2 \implies g_1 = g_2$.

Wie kann man man den Begriff “Teilmenge” in der Sprache der Kategorientheorie ausdrücken? Eine Teilmenge von A ist ein Monomorphismus $i \in \mathrm{Mor}(B, A)$. Man beachte, dass B als Menge noch keine Teilmenge ist, da man in der Kategorie keine Relation zwischen den Elementen von A und von B hat. Erst der Morphismus i macht B zur Teilmenge.

Elemente

Es sei $A \in \mathit{Sets}$. Was ist eine Element von A in der Sprache der Kategorientheorie?

Ein Objekt T einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *terminal*, wenn es für jedes Objekt $A \in \mathcal{C}$ genau einen Morphismus in $\mathrm{Mor}(A, T)$ gibt. Nicht jede Kategorie besitzt terminale Objekte, aber wenn ein terminales Objekt existiert, dann ist es eindeutig bis auf Isomorphismus.

Die Kategorie *Sets* besitzt ein terminales Objekt, nämlich die einelementige Menge $T = \{*\}$.

Wenn eine Kategorie ein terminales Objekt besitzt, dann definieren wir als Elemente von A als Morphismen von einem terminalen Objekt nach A.

Produkte

Es seien A_1 und A_2 Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein Objekt P zusammen mit Morphismen $p_1 \in \mathrm{Mor}(P, A_1)$ und $p_2 \in \mathrm{Mor}(P, A_2)$ heißt Produkt von A und B, wenn für jedes Objekt T und Morphismen $a_1 \in \mathrm{Mor}(T, A_1)$, $a_2 \in \mathrm{Mor}(T, A_2)$ genau ein Morphismus $g \in \mathrm{Mor}(T, P)$ existiert, sodass $a_1 = p_1 \circ g$ und $a_2 = p_2 \circ g$ gilt.

Produkte existieren nicht immer, aber wenn, dann sind sie eindeutig bis auf Isomorphismus; man schreibt oft $P = A \times B$, obwohl das Produkt eben nur bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. In *Sets* ist die Menge der Paare das Produkt.

Koprodukte

Es seien A_1 und A_2 Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$. Ein Objekt S zusammen mit Morphismen $s_1 \in \mathrm{Mor}(A_1, P)$ und $s_2 \in \mathrm{Mor}(A_2, S)$ heißt Koprodukt von A und B, wenn für jedes Objekt T und Morphismen $a_1 \in \mathrm{Mor}(A_1, T)$, $a_2 \in \mathrm{Mor}(A_2, T)$ genau ein Morphismus $g \in \mathrm{Mor}(S, T)$ existiert, sodass $a_1 = g \circ p_1$ und $a_2 = g \circ p_2$ gilt.

Auch Koprodukte sind eindeutig bis auf Isomorphismus, wenn sie existieren. In *Sets* ist die disjunkte Vereinigung das Koprodukt.

Allgemeiner gibt es für jeden kategorientheoretischen Begriff in der Kategorientheorie einen dualen Begriff, bei dem die Richtung aller Morphismen umgedreht ist.

Vergleich

Hardcore-Kategorientheoretiker haben die Kategorientheorie ganz ohne Mengenlehre formuliert und schlugen vor, Mathematik nur auf Kategorientheorie aufzubauen. Das hat sich nicht durchgesetzt: in der universitären Mathematik setzen Analysis und Algebra nach wie vor auf der Mengenlehre auf.

Die Kategorientheorie ist dafür bis heute viel wirksamer im Alltag des mathematischen Betriebs: vor allem in den Gebieten Geometrie, Topologie und Algebra werden Zusammenhänge sehr oft kategorientheoretisch aufgefasst und kommuniziert. Von Mengenlehre ist ausserhalb von Konferenzen/Instituten, die sich ausdrücklich mit dieser Disziplin befassen, nicht mehr viel zu hören.

Quellen

- https://en.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel_set_theory
- https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage
- Jean-Pierre Marquis, What is Category Theory?, in G. Sica (ed.) What is Category Theory?, Polimetrica (2006) 221-256. Available as https://ncatlab.org/nlab/files/Marquis-CategoryTheory.pdf

Literaturempfehlungen:

- F.W. Lawvere, R. Rosebrugh: Sets for Mathematics, CUP 2003.
- T. Leinster: Rethinking Set Theory, https://arxiv.org/pdf/1212.6543