Übung 11 (11.1.2019)

Beispiel 1 (Lotka-Volterra). Es sei $X = (0, \infty)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $F : X \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $(x, y) \mapsto (x(1-y), y(x-1))$. Es sei $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $(x, y) \mapsto (-y, x)$. Man zeige, dass F und G topologisch equivalent sind (durch Konstruktion eines Homöomorphismus, der Integralkurven von F auf Integralkurven von G abbildet).

Bemerkung: Wenn ein Vektorfeld mit einer periodischen Lösung in ein anderes transformiert wird, dann erhält die Transformation die minimale Periode (also die kleinste positive Zahl T, sodass $f(t+T) = f(t)$ ist) der Lösung. Man kann beobachten, dass F verschiedene minimale Perioden hat; andererseits sind bei G alle minimalen Perioden gleich. Daraus folgt, dass F und G nicht transformations-equivalent sind.

Beispiel 2. Es sei $\lambda < 0$, $L := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Man finde eine positiv definite symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodaß

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) : \ \langle v \mid Lv \rangle_B < 0$$

gilt.

Beispiel 3. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $(x, y) \mapsto \left(-\frac{x}{2} + y^2, -\frac{y}{2} + x^2\right)$ (Python-Visualisierung `http://www.risc.jku.at/people/jschicho/dg/ue113.py`).
a) Man bestimme eine Ljapunov-Funktion für das Equilibrium $p_0 = (0, 0)$ (also eine differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die bei p_0 ein isoliertes lokales Minimum hat, und deren vektorielle Ableitung bei p_0 ein isoliertes lokales Maximum hat).
b) Man bestimme eine offene Umgebung W von p_0, sodass für alle $p \in W$ gilt:

$$\forall t > 0 : \phi_F(t, p) \in W, \ \lim_{t\to\infty} \phi_F(t, p) = p_0.$$

Beispiel 4. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $(x, y) \mapsto (-x + y^2 + x^3, -y)$. Wie in Beispiel 3:
a) Man bestimme eine Ljapunov-Funktion für das Equilibrium $p_0 = (0, 0)$.
b) Man bestimme eine offene Umgebung W von p_0, sodass für alle $p \in W$ gilt:

$$\forall t > 0 : \phi_F(t, p) \in W, \ \lim_{t\to\infty} \phi_F(t, p) = p_0.$$