Übung 8 (27.11.2018, 9:15-10:00, BA 9910)

Beispiel 1. Es sei $D = (0, \infty)$. Es seien

$$B : D \to \mathbb{R}^{2\times 2}, t \mapsto= \begin{pmatrix} 1 & t^{-1} \\ t & -1 \end{pmatrix}, A : D \to \mathbb{R}^{2\times 2}, t \mapsto B'(t)B(t)^{-1},\ b : D \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Man berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $f : D \to \mathbb{R}^2$:

$$\forall t \in D :\ f'(t) = A(t)f(t) + b(t).$$

Hinweis: B ist genau die matrix-wertige Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Beispiel 2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\forall t : f'(t) = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 12 & 7 \end{pmatrix},\ f(0) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei λ ein reeller Parameter ist. Gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existiert? Wenn ja, gebe man ein solches λ an.

Beispiel 3. Man berechne die Flüsse – inklusive Definitionsbereich – für die beiden Vektorfelder

$$F_1, F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F_1(x) = x^2,\ F_2(x) = x^2 + 1.$$

Beispiel 4. Es sei $T \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, $F : T \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Es sei $t_0 \in T$ und $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Man adaptiere den Satz von Picard/Lindelöf für das Anfangswortproblem für $f : T \to \mathbb{R}$

$$\forall t \in T : f''(t) = F(t, f(t), f'(t)),\ f(t_0) = x_0, f'(t_0) = x_1$$

und beweise die adaptierte Version.

Hinweis: es ist nicht notwendig, den Beweis zu adaptieren; man kann die neue Version auch auf die bereits bewiesene Version zurückführen.