Übung 5 (6.11.2018)

Beispiel 1.
In Kapitel 9 im Skriptum wird eine Rekursion auf n-Ecken untersucht. Man erzeuge mit dem Programm `http://www.risc.jku.at/people/jschicho/dg/ngpy` erzeuge man ein n-Eck mit 50 bis 100 Ecken und führe Iterationsschritte durch.
a) Welche Figur entsteht als Grenzwert, bei Schwerpunkt im Mittelpunkt und Vergrößerungen zwischendurch?
b) Man gebe eine Formel für den betragsmäßig größten Eigenwert der Iterationsmatrix an.
Das Programm wird mit python exekutiert. Die Befehle sind:

```
a       add a point
b       add last point
g       each vertex replaced by midpoint of neighbors
f       fast repeat of g
m       magnify 10%
s       shrink 10%
c       center (to get center of mass closer to the middle)
SPC     clear n-gon
q       quit
```

Beispiel 2. Die Fibonacci-Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall t : f(t+2) - f(t+1) - f(t) = 0,\ f(0) = 0, f(1) = 1$$

hat nur ganzzahlige Werte. Die Lösungsformel

$$f(t) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^t$$

zeigt, dass der erste Summand exponential nahe bei ganzen Zahlen ist: es existieren Konstanten c_1 und $c_2 \in (0,1)$, sodass die Differenz zur nächsten ganzen Zahl kleiner als $c_1 c_2^t$ ist.
Man zeige, dass die Folge $\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^t\right)_t$ ebenfalls exponentiell nahe bei ganzen Zahlen ist.
Hinweis: man konstriere eine Folge mit einer Lösungsformel mit einem passenden Summanden.
Bemerkung: Eine Pisot-Zahl ist eine algebraische Zahl mit der Eigenschaft, dass aller Nullstellen des Minimalpolynoms ausser der Zahl selbst Betrag kleiner als 1 haben (zum Beispiel $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$). Es gilt allgemein, dass die Folge der Potenzen einer Pisot-Zahl exponentiell nahe bei ganzen Zahlen liegt.

Beispiel 3.
Man berechne eine geschlossene Formel für die allgemeine Lösung der Rekursion für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$f(t+9) - 2f(t+5) + f(t+1) = 0.$$

Beispiel 4 Man berechne eine geschlossene Formel für die Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall t : f(t+3) = 12f(t+2) - 17f(t+1) - 30f(t),\ f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 5.$$

Hier sollte zur Faktorisierung des charakteristischen Polynoms ein Computerprogramm verwendet werden.