Übung 4 (30.10.2018)

Beispiel 1. Die Differentialgleichung für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\forall t : f''(t) - 2tf'(t) + 2f(t) = 0$$

besitzt eine nichttriviale Lösung, die eine Polynomfunktion ist (von nicht sehr hohem Grad). Man gebe die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an (oder equivalent dazu, zwei linear unabhängige Lösungen).

Beispiel 2. Man löse die folgenden Differentialgleichungen für $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ symbolisch.
a) $f'(t) = \frac{f(t)^2}{t^2} + \frac{f(t)}{t}$
b) $f'(t) = f(t)^2 t^2 + f(t)t$

Beispiel 3 Man löse die folgenden Differentialgleichungen für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ symbolisch.
a) $f''(t) = f(t) + \sin(t)$
b) $f''(t) = f(t)^2$

Beispiel 4. a) Die vektorwertige Funktion $t \mapsto \binom{\cos(t)}{\sin(t)}$ erfüllt eine Differentialgleichung der Form $\forall t : f'(t) = Af(t)$ für eine eindeutig bestimmte Matrix A. Man finde A.
b) Man finde eine weitere linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung in (a) durch Verschiebung in der t-Koordinate (das funktioniert, weil die Differentialgleichung autonom ist).
c) Man finde eine Lösung für die Differentialgleichung für $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$g'(t) - Ag(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix},$$

wobei A die Matrix von (a) ist.