Übung 3 (23.10.2018)

Beispiel 1. Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$F(x) = -\begin{cases} (x+2)(x+1)^2 x & \text{falls } x \leq 0 \\ 0 & \text{falls } x \in [0,1] \\ (x-1)^2(x-2) & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $f'(t) = F(f(t))$. Man bestimme $\lim_{t\to\infty} f(t)$ in Abhängigkeit des Startwertes $f(0)$.

Beispiel 2. Man skizziere die Bifurkationsdiagramme für die parameterabhängige Differentialgleichung für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\forall t : f'(t) = F_\lambda(t)\ \lambda \in \mathbb{R},$$

in den Fällen
a) $F_\lambda(t) = t(t^2 + \lambda^2 - 1)$.
b) $F_\lambda(t) = (t-\lambda)(t^2 + \lambda^2 - 1)$.

Beispiel 3 (lokale Existenz bei TdV.) Es seien $T \subset \mathbb{R}$ und $X \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $t_0 \in T$, $x_0 \in X$. Es seien $a : X \to \mathbb{R}^*$ und $b : T \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man zeige, dass eine Umgebung U von t_0 und eine Funktion $f : U \to X$ existieren, sodass beide Seiten der Differentialgleichung

$$\forall t \in U : f'(t) = \frac{b(t)}{a(f(t))}$$

definiert sind und sodass die Differentialgleichung erfüllt ist.

Beispiel 4. Man gebe die allgemeine Lösung für folgende Differentialgleichungen für $f : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ an:
a) $\forall t : f'(t) = -\frac{t}{f(t)}$
b) $\forall t : f'(t) = \frac{\sinh(t)}{\sinh(f(t)}$
c) $\forall t : f'(t) = e^{t^2 - f(t)^2}$