Übung 11 (9.1.2018), Version von 3.1.2018

Beispiel 1 (Lorenz Attraktor). Es seien $s, r, b > 0$ reelle Konstanten. Es sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Lorenz-Richtungsfeld $(x, y, z) \mapsto (-s(x-y), rx - y - xz, xy - bz)$. Es sei $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion $(x, y, z) \mapsto rx^2 + sy^2 + s(z - 2r)^2$.
a) Man berechne die Richtungsableitung $\partial_L E$.
b) Man zeige, daß die Menge $J := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \partial_L E(p) \geq 0$ kompakt ist.
c) Man zeige, daß für alle $p \in J$ gilt:

$$E(p) \leq r^2 b + sr^2 b + 4sr^2.$$

d) Man gebe einen sicheren Bereich für L an, das heißt, eine kompakte Menge K, sodass für alle $p \in K$ und für alle $t > 0$ der Fluss $\phi(t, p)$ im Inneren von K liegt.

Beispiel 2. Es sei $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die rekursiv definierte Folge

$$x_0 = 0.5, \forall k : x_{k+1} = 3.9 x_k (1 - x_k).$$

Man berechne x_{500} auf 5 Dezimalstellen genau. (Zur Probe: die ersten zwei Stellen sind 0.96...)

Beispiel 3. Es sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x \mapsto 16xy - (x+y)^3/3$. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Richtungsfeld

$$F(x, y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - g(x, y) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - g(x, y) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right).$$

a) Die algebraische Kurve $C : \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ zerlegt die Ebene in 3 Teile: das Komplement hat 3 Zusammenhangskomponenten. Man zeige, daß die Richtungsableitung $\partial_F(g)$ in jeder Komponente konstantes Vorzeichen hat.
b) Man zeige, daß die Kurve $\{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ einen Sattelpunkt und einen homoklinen Orbit enthält.
c) Es sei U_0 die beschränkte Komponente des Komplements von C (es gibt nur eine). Man zeige, daß fast alle Lösungen der Differentialgleichung, die durch das Vektorfeld gegeben ist, mit Startwert in der einzigen beschränkten Komponente asymptotisch gegen die Kurve C konvergieren.

Beispiel 4. Man bestimme die Equilibrien des Vektorfelds $(x, y) \mapsto (\sin(y), \sin(x))$. Für die hyperbolischen Gleichgewichtspunkte bestimme man den Typ (Quelle, Senke, oder Sattel).