Übung 10 (12.12.2017)

Beispiel 1. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Es sei $f : \mathbb{R} \to U$ ein Zyklus (d.h. eine nicht konstante periodische Lösung der Diff.-gleichung). Man zeige, daß die Menge aller Perioden von f (d.h. aller Elemente $T > 0$ sodaß $f(t+T) = f(t)$ für alle t gilt) ein kleinstes Element T_0 besitzt, und daß jede Periode ein ganzzahliges Vielfaches von T_0 ist.

Beispiel 2. Es sei $\lambda \in [0,4]$ und $F_\lambda : x \mapsto \lambda x(1-x)$.

a) Man zeige, daß die Rekursion $x_{n+1} = F_\lambda(x_n)$ höchstens einen 2-Zyklus besitzt.

b) Man bestimme die Menge aller λ, für die diese Rekursion einen 2-Zyklus besitzt.

c) Man bestimme die Teilmenge aller λ, für die der 2-Zyklus stabil ist.

Beispiel 3. Man finde experimentiell heraus, ob das parametrisierte Vektorfeld

$$F_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (y + \sin(\lambda x), -x)$$

für $\lambda = 1,2,3,4$ stabile Zyklen besitzt. Dasselbe für das umgedrehte Vektorfeld $-F_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Beispiel 4. Gegeben ist das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x(1-r^2) - y\left(1 + \frac{x}{r}\right), y(1-r^2) + x\left(1 + \frac{x}{r}\right))$$

wobei $r(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ ist; der Audruck ist für $(x,y) = (0,0)$ nicht definiert, hier wird $F(0,0) := (0,0)$ gesetzt.

a) Man transformiere das Vektorfeld in Polarkoordinaten.

b) Man zeige, daß für alle $p \neq (0,0)$ gilt: $\lim_{t\to\infty} \phi(t,p) = (-1,0)$.

c) Ist $(-1,0)$ ein asymptotisch stabiles Equilibrium?