Übung 9 (5.12.2017)

Beispiel 1. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Richtungsfeld $(x, y) \mapsto (-y - x/2, x - y/2)$. Man wende die Koordinatentransformation

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u, v) = \alpha(x, y) = (x - y^2, y),\ \alpha^{-1}(u, v) = (u + v^2, v)$$

an und berechne das transformierte Vektorfeld. Man vergleiche das Resultat mit der Visualisierung durch das Programm `http://www.falstad.com/vector/`.

Lösung. Das Vektorfeld beschreibt die Differentialgleichung für $(x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$(x', y') = (-y - x/2, x - y/2)$$

(die Gleichung ist als Gleichung von Funktionen zu verstehen). Die Koordinatentransformation transformiert die Funktionen x, y zu den Funktionen u, v wie in der Angabe angegeben. Die transformierte Differentialgleichung ist

$$(u'v') = (x' - 2yy', y') = (-y - x/2 - 2y(x - y/2), x - y/2)$$

$$= (-v - (u + v^2)/2 - 2v(u + v^2 - v/2), u + v^2 - v/2) = (-v - u/2 - 2uv + v^2/2 - 2v^3, u - v/2 + v^2).$$

In beiden Visualsierungen sieht man einen Strudel, der die ganze Ebene anzieht, nur die Form des Strudels ist unterschiedlich.

Beispiel 3. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\forall t :\ y'(t) + ty(t) + e^{-t^2/2} \sin(t) = 0.$$

Die homogene Differentialgleichung für $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\forall t :\ y'(t) + ty(t) = 0$$

läßt sich durch Trennung der Variablen lösen. Die allgemeine Lüsung ist $z(t) = Ce^{-t^2/2}$. Für die inhomogene Geichung setzen wir an $y(t) = c(t)e^{-t^2/2}$ und setzen in die Differentialgleichung für y ein. Die mit $c(t)$ behafteten Terme kürzen einander, es bleibt

$$\forall t :\ c'(t)e^{-t^2/2} + e^{-t^2/2} \sin(t) = 0$$

oder $c'(t) = -\sin(t)$, d.h. $c(t) = \cos(t) + C$. Damit ist die allgemeine Lösung

$$y(t) = e^{-t^2/2}(\cos(t) + C).$$