Übung 9 (5.12.2017)

Beispiel 1. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Richtungsfeld $(x, y) \mapsto (-y - x/2, x - y/2)$. Man wende die Koordinatentransformation

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u, v) = \alpha(x, y) = (x - y^2, y),\ \alpha^{-1}(u, v) = (u + v^2, v)$$

an und berechne das transformierte Vektorfeld. Man vergleiche das Resultat mit der Visualisierung durch das Programm `http://www.falstad.com/vector/`.

Beispiel 2. Gegeben ist das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto \left(x(1 - x^2 - y^2) - y, y(1 - x^2 - y^2) + x\right).$$

a) Man berechne die Richtungsableitung der Polarkoordinaten $r(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ und $a(x, y) := \arctan(\frac{y}{x})$ für $x > 0$.

b) Man zeige, daß für jeden Anfangswert $p \in \mathbb{R}^2$ die Lösungskurve $[0, \infty) \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \phi(t, p)$ beschränkt ist.

Beispiel 3. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\forall t :\ y'(t) + ty(t) + e^{-t^2/2} \sin(t) = 0.$$

Beispiel 4. Es sei $\mathcal{D}$ diee Menge der Differentialoperatoren $C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ mit konstanten Koeffizienten. Es sei $\alpha \in \mathcal{D}$. Man zeige, daß der Operator

$$\beta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}) \forall t \in \mathbb{R} : \beta(f)(t) = \frac{d(e^t f(t)}{dt} e^{-t}$$

wieder in $\mathcal{D}$ ist.
Zusatzfrage: wie hängen die charakteristischen Polynome von α und β zusammen?