Übung 8 (28.11.2017) mit Lösungen

Beispiel 1. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $(x, y) \mapsto (xy, x^2 + y^2 - 1)$ (Python-Visualisierung `http://www.risc.jku.at/people/jschicho/dg/bsp1.txt`).

a) Man bestimme die Equilibrien und stelle für die hyperbolischen Equilibrien fest, ob es sich um Quellen, Senken, oder Sattelpunkte handelt.

b) Bei richtiger Rechnung gibt es genau eine Senke; nenen wir sie p_0. Man finde eine Umgebung U von p_0 und eine strikte Ljapunov-Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ für $F|_U$ und p_0 (d.h. g hat bei p_0 ein lokales Mininum, und die Richtungsableitung $\delta_F(g)$ ist auf $U \setminus \{p_0\}$ negativ).

c) Man finde einen Einzugsbereich V für p_0 (d.h. Lösungen mit Startwert in V konvergieren gegen p_0).

Lösung. a) Die Equilibrien sind

$$p_1 = (1, 0), p_2 = (0, 1), p_3 = (-1, 0), p_0 = (0, -1).$$

Durch Einsetzen in Die Jabobimatrix $\begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$ ergeben sich die Matrizen

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, J_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

mit Eigenwerten

$$\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}, \{1, 2\}, \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}, \{-1, -2\}.$$

Es folgt, dass p_2 eine Quelle ist, dass p_0 eine Senke ist, und dass p_1 und p_3 Sattelpunkte sind.
b) Man setze $g : (x, y) \mapsto x^2 + (y + 1)^2$. Sie hat bei p_0 ein globales Minimum. Die Richtungsableitung ist

$$\delta_F(g)(x, y) = 2x \cdot xy + 2(y + 1)(x^2 + y^2 - 1) = 2(y + 1)^1(y - 1) + 2x^2(2y + 1).$$

Also ist g in $U := \mathbb{R} \times (-\infty, -\frac{1}{2})$ eine strikte Ljapunov.
c) Das Minimum von g am Rand von U ist $\frac{1}{4}$, daher ist

$$V := \{(x, y) \mid x^2 + (y + 1)^2 < \frac{1}{4}$$

ein Einzugsbereich.

Beispiel 2. Es sei $\lambda < 0$, $L := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Man finde eine positiv definite symmetrische Matrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, sodaß

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) : \ \langle v \mid Lv\rangle < 0$$

gilt.

Lösung. Nach der Formel in der Vorlesung setzen wir für $x \in \mathbb{R}^2$

$$\langle x \mid x\rangle_B := \int_0^\infty \langle e^{tL}x, e^{tL}x\rangle = \int_0^\infty e^{2\lambda t}((x + ty)^2 + y^2)dt = \frac{x^2}{2|\lambda|} + \frac{xy}{2\lambda^2} + \frac{(2\lambda^2 + 1)y^2}{4|\lambda|^3}$$

(Rechnung mit Maple). Die Lösung ist nicht eindeutig.

Beispiel 3. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $(x, y) \mapsto \left(-\frac{x}{2} + y, -\frac{y}{2} + x^2\right)$ (Python-Visualisierung `http://www.risc.jku.at/people/jschicho/dg/bsp3.txt`). Es sei $p_0 = (0, 0)$.

a) Man bestimme wieder die Equilibrien und stelle für die hyperbolischen Equilibrien fest, ob es sich um Quellen, Senken, oder Sattelpunkte handelt.

b) Der Punkt p_0 ist (bei richtiger Rechnung) eine Senke. Man finde eine Umgebung U von p_0 und eine strikte Ljapunov-Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ für $F|_U$ und p_0.

c) Man finde einen Einzugsbereich V für p_0.

Lösung. a) Die Equilibrien sind $p_0 = (0,0)$ und $p_1 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$. Durch Einsetzen in Die Jabobimatrix $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 2x & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ergeben sich die Matrizen

$$J_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, J_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix J_0 hat doppelten Eigenwert $-\frac{1}{2}$, die Matrix J_1 hat Eigenwerte $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$. Daher ist p_0 eine Senke und p_1 ein Sattelpunkt.

b) Nach der Lösung von Beispiel 2 setzen wir Man setze $g : (x,y) \mapsto x^2 + xy + 3y^2$. Sie hat bei p_0 ein globales Minimum. Die Richtungsableitung ist

$$\delta_F(g)(x,y) = (2x+y)(-\frac{x}{2}+y)+(x+6y)(-\frac{y}{2}+x^2) = -x^2+xy-2y^2+x^3+6x^2y = (-1+x+6y)x^2+xy-2y^2 = 2(y-x/4)^2-$$

daher ist g in $U := \{(x,y) \mid -7 + 8x + 48y < 0\}$ eine strikte Ljapunov.

c) Am Rand von U ist der minimale Wert von g gleich $\frac{49}{768}$ (Minimalstelle $(0, \frac{7}{48})$. Also ist

$$V := \{(x,y) \mid x^2 + xy + 3y^2 < \frac{49}{768}$$

ein Einzugsbereich.

Beispiel 4. In der Vorlesung wurde der Satz über die strukturelle Stabilität von hyperbolischen Quellen/Senken besprochen. Man formuliere einen analogen Satz für diskrete Systeme.

Lösung. Satz von der strukturellen Stabilität bestimmter Fixpunkte: Es sei $n \in \mathbb{N}, U \in \mathbb{R}^n, \epsilon > 0$. Es sei $F_{\_} : (-\epsilon, \epsilon) \times U \to U, (\lambda, x) \mapsto F_\lambda(x)$ stetig differenzierbar. Es sei $x_0 \in U$ ein Fixpunkt von F_0, sodaß der Betrag von allen Eigenwerten der Jacobi-Matrix von F_0 an der Stelle x_0 kleiner als 1 ist. Dann existiert $\delta > 0$, sodass für alle $\lambda \in (-\delta, \delta)$ die Funktion F_λ wieder einen Fixpunkt x_λ hat, sodass der Betrag von allen Eigenwerten der Jacobi-Matrix von F_λ an der Stelle x_λ kleiner als 1 ist.

Der Satz ist übrigens richtig und lässt sich ebenfalls mit einer Parameter-Version des Satzes über die inverse Funktion beweisen (angewandt auf $x \mapsto F_\lambda(x) - x$). (Beweis war aber nicht gefragt.)