

## Übung 8 (28.11.2017)

**Beispiel 1.** Es sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  das Vektorfeld  $(x, y) \mapsto (xy, x^2 + y^2 - 1)$  (Python-Visualisierung <http://www.risc.jku.at/people/jschicho/dg/bsp1.txt>).

- Man bestimme die Equilibrien und stelle für die hyperbolischen Equilibrien fest, ob es sich um Quellen, Senken, oder Sattelpunkte handelt.
- Bei richtiger Rechnung gibt es genau eine Senke; nennen wir sie  $p_0$ . Man finde eine Umgebung  $U$  von  $p_0$  und eine strikte Ljapunov-Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  für  $F|_U$  und  $p_0$  (d.h.  $g$  hat bei  $p_0$  ein lokales Minimum, und die Richtungsableitung  $\delta_F(g)$  ist auf  $U \setminus \{p_0\}$  negativ).
- Man finde einen Einzugsbereich  $V$  für  $p_0$  (d.h. Lösungen mit Startwert in  $V$  konvergieren gegen  $p_0$ ).

**Beispiel 2.** Es sei  $\lambda < 0$ ,  $L := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ . Man finde eine positiv definite symmetrische Matrix  $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , sodaß

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) : \langle v | Lv \rangle_B < 0$$

gilt.

**Beispiel 3.** Es sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  das Vektorfeld  $(x, y) \mapsto \left(-\frac{x}{2} + y, -\frac{y}{2} + x^2\right)$  (Python-Visualisierung <http://www.risc.jku.at/people/jschicho/dg/bsp3.txt>). Es sei  $p_0 = (0, 0)$ .

- Man bestimme wieder die Equilibrien und stelle für die hyperbolischen Equilibrien fest, ob es sich um Quellen, Senken, oder Sattelpunkte handelt.
- Der Punkt  $p_0$  ist (bei richtiger Rechnung) eine Senke. Man finde eine Umgebung  $U$  von  $p_0$  und eine strikte Ljapunov-Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  für  $F|_U$  und  $p_0$ .
- Man finde einen Einzugsbereich  $V$  für  $p_0$ .

**Beispiel 4.** In der Vorlesung wurde der Satz über die strukturelle Stabilität von hyperbolischen Quellen/Senken besprochen. Man formuliere einen analogen Satz für diskrete Systeme.