Übung 6 (21.11.2017)

Beispiel 1. Man berechne eine Näherungslösung für das Randwertproblem für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = f(t)^2, \; f(0) = 1$$

mit dem Eulerschen Polygonzugsverfahren. Welcher Wert für $f(1)$ ergibt sich für $N = 10, 20, 50, 100, 1000$, wobei N die Anzahl der Teilintervalle ist?

Beispiel 2. Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L > 0$. In der Vorlesung wurde gezeigt:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, L^{-1}] : \; |\phi(t,x) - \phi(t,y)| \leq \frac{|x-y|}{1-Lt}.$$

Man zeige die stärkere Behauptung

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty) : \; |\phi(t,x) - \phi(t,y)| \leq e^{Lt}|x-y|.$$

Dabei darf die Formel $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a}{n})^n = e^a$ verwendet werden.

Beispiel 3. Man berechne den Fluß des Richtungsfeldes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$. Insbesondere spezifiziere man den Definitionsbereich.

Beispiel 4. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Richtungsfeld $(x, y) \mapsto (y + 2xy - 2y^3, x - y^2)$. Man wende die Koordinatentransformation

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; (u, v) = \alpha(x, y) = (x - y^2, y), \; \alpha^{-1}(u, v) = (u + v^2, v)$$

an und berechne das transformierte Vektorfeld.
Bei richtiger Rechnung läßt sich die Differentialgleichung für das transformierte Feld leicht lösen. Man löse sie und bestimme die Lösungen für das Vektorfeld F durch Rücktransformation.