Übung 6 (14.11.2017)

Beispiel 1. Es sei $D = (0, \infty)$. Die Funktion $f_1 : D \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t$ ist eine spezielle Lösung der Gleichung für $y : D \to \mathbb{R}$

$$\forall t: \; y''(t) = t^{-2}y(t) - t^{-1}y'(t), \tag{1}$$

wie man leicht durch Nachrechnen zeigt. Man berechne die allgemeine Lösung
(Ansatz: $y(t) = f_1(t)x(t)$).
Danach berechne man die allgemeine Lösung der Gleichung für $z : D \to \mathbb{R}$:

$$\forall t: \; z''(t) - t^{-2}z(t) + t^{-1}z'(t) = 1. \tag{2}$$

Beispiel 2. Es sei $D = (0, \infty)$. Es seien

$$B : D \to \mathbb{R}^2, t \mapsto= \begin{pmatrix} 1 & t^{-1} \\ t & -1 \end{pmatrix}, A : D \to \mathbb{R}^2, t \mapsto B'(t)B(t)^{-1}, \; f : D \to \mathbb{R}^2, \; t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Man berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y : D \to \mathbb{R}^2$:

$$\forall t \in D: \; y'(t) = A(t)y(t) + f(t).$$

Beispiel 3. Man zeige, daß die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \sqrt{y}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

Beispiel 4. Man bestimme den Picard-Lindelöf-Operator $\pi\lambda$ für das AWP für $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\forall t: \; y'(t) = y(t), y(0) = 1.$$

Die Folge $(f_n)_n$ von Funktionen $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f_0 : t \mapsto 0$, und $\forall n \in \mathbb{N} : f_{n+1} = \pi\lambda(f_n)$. Man berechne die ersten fünf Folgenglieder.