Übung 5 (7.11.2017)

Beispiel 1. Man berechne $e^{A_r x}$, $x \in \mathbb{R}$, für $r = 1, 2, 3$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} -12 & -16 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Im Fall von A_3 wird empfohlen, nicht die Methode der Jordan-Normalform zu verwenden, sondern die Exponentialreihe direkt zu berechnen.

Beispiel 2. Es seien X, Y metrische Räume. Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Man zeige, daß die beiden folgenden Aussagen equivalent sind.

A: $\forall x \ \in X\ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y' \in Y, d_Y(f(x), y') < \delta\ \exists x' \in X : d_X(x, x') < \epsilon \wedge f(x') = y'$

B: f bildet jede offene Menge wieder auf eine offene Menge ab (man sagt: f ist eine offene Abbildung).

Beispiel 3. Man berechne jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$a) \forall t : y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t.$$

$$b) \forall t : y''(t) + y'(t) = \sin(t).$$

Beispiel 4. Man visualisiere mit dem Programm `http://www.falstad.com/vector/` das Verhalten der Lösungen der Gleichung für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\forall x : y'(x) = Ay(x)$, für verschiedene 2×2-Matrizen A (positive/negative/komplexe Eigenwerte, doppelte Eigenwerte, Eigenwerte mit Realteil 0). Unter `user-defined field` in der `Setup`-Leiste kann eine beliebige reelle Matrix eingegeben werden. Interessant ist auch die Funktion `streamlines` im `Floor`-Menü, die die Lösungskurven zeichnet.