Übung 4 (31.10.2017)

Beispiel 1. Eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 1$ heißt *Pisot-Zahl*, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

- Es existiert ein Polynom $p \in \mathbb{N}[x]$ mit führendem Koeffizient 1, sodaß $p(\alpha) = 0$ ist. (Wenn so ein Polynom existiert, dann nennt man α *ganz algebraisch.*)

- Wenn p wie oben irreduzibel ist, dann sind haben alle (i.a. komplexen) Nullstellen von p mit Ausnahme von α Betrag kleiner 1.

Zum Beispiel ist $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ eine Pisot-Zahl, mit $p = X^2 - X - 1$.
Es sei α eine Pisot-Zahl und $p \in [X]$ ein irreduzibles Polynom mit führendem Koeffizient 1, sodaß $p(\alpha) = 0$ ist. Es sei $\pi \in \mathcal{R}$ der lineare Operator $\chi^{-1}(p)$. Man zeige, daß jede Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ in $\ker(\pi)$ mit ganzzahligen Anfangswerten $f(0), \ldots, f(\deg(p) - 1)$, mit Ausnahme der Nullfolge, divergent ist.

Beispiel 2. Es sei $\alpha > 1$ eine Pisot-Zahl.
Man zeige, daß eine reelle Zahl $\beta > 0, M > 0, \epsilon < 1$ existieren, sodaß

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\beta\alpha^n - rd(\beta\alpha^n)| < M\epsilon^n$$

gilt ("die Zahlen $\beta\alpha^n$ liegen exponentiell nahe bei ganzen Zahlen"). Dabei bedeutet $rd(x)$ die nächstgelegene ganze Zahl.

Bemerkung: Man kann sogar zeigen, daß die Zahlen α^n exponentiell nahe bei ganzen Zahlen liegen. Dieser Beweis ist aber komplizierter und verwendet keine linearen Rekursionen.

Beispiel 3. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung des Anfangswertproblems für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\forall t : y(t)'' - y'(t) - y(t) = 0, y(0) = y'(0) = 1.$$

Man berechne die Taylorreihe von f bei 0.

Beispiel 4. Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\forall t : y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

im Fall $a^2 - 4b < 0$ (schwach gedämpfter Fall).