

Übung 2 (24.10.2017)

Beispiel 1. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir betrachten das Equilibrium $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ im dynamischen System das durch die Rekursion für $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\forall i \in \mathbb{N} : x(i+1) = A x(i)$$

beschrieben wird. Man zeige:

- Wenn $\vec{0}$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist, dann ist die Folge der Matrizen $(A^i)_{i \in \mathbb{N}}$ beschränkt.
- Wenn $\vec{0}$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt ist, dann ist konvergiert die Folge der Matrizen $(A^i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen die Nullmatrix.

Beispiel 2. Man zeige die Umkehrungen von Beispiel 1:

- Wenn die Folge der Matrizen $(A^i)_{i \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann ist $\vec{0}$ ein stabiler Gleichgewichtspunkt,
- Wenn die Folge der Matrizen $(A^i)_{i \in \mathbb{N}}$ gegen die Nullmatrix konvergiert, dann ist $\vec{0}$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Beispiel 3. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Permutationsmatrix zur zyklischen Permutation $(1\ 2\ \dots\ n)$. Es sei $B := S + S^{-1}$. Man berechne Jordansche Normalformen von S und von B .

Hinweis: Die Jordansche Normalform von B kann mithilfe der Jordanschen Normalform von S berechnet werden.

Beispiel 4. Es sei $n = 5$, S und B wie in Beispiel 3. Aus der richtigen Lösung von Beispiel 3 sehen Sie, daß der Eigenraum zum betragsmäßig zweitgrößtem Eigenwert λ von B 2-dimensional ist. Es sei

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)\}$$

eine Basis dieses Eigenraums. Es sei \diamond das aus den Punkten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , (x_4, y_4) und (x_5, y_5) gebildete Fünfeck in \mathbb{R}^2 .

Man betrachte eine Folge von Fünfecken wie in der Vorlesung konstruiert (1:03:00 bis 1:04:30 in der Aufzeichnung `gdds03.mp4`), wobei das Anfangsfünfeck den Schwerpunkt in $(0, 0)$ hat und bei jedem Schritt mit dem Faktor λ^{-1} vergrößert werden soll. Man zeige, daß diese Folge von Fünfecken konvergiert und daß das Grenzwert-Fünfeck ein Bild von \diamond ist.