Übung 2 (17.10.2016)

Beispiel 1. Gegeben ist die parametrische Differentialgleichung für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$F_\lambda(x) = x(\lambda - x^2),$$

$$\forall t : \ f'(t) = F_\lambda(f(t)) = f(t)(\lambda - f(t)^2),$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter ist. Man zeichne das Phasenporträt für $\lambda = 1$ und das Birfukationsdiagramm (ohne die allgemeine Lösung zu berechnen).

Beispiel 2. Man berechne eine die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen für $y : D \to \mathbb{R}$

a $\forall x : y'(x) = \frac{\cos(x)}{\cos(y(x))}$,

b $\forall x : y'(x) = e^{x+y(x)}$,

c $\forall x : y'(x) = 1 + x + y(x) + xy(x)$,

wobei D eine kleine Umgebung von 0 ist.

Beispiel 3. Man führe die vektorwertige Differentialgleichung zweiter Ordnung für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\forall t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} f_1''(t) \\ f_2''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(t) f_2(t) \\ f_2'(t) + t \end{pmatrix}$$

auf eine vektorwertige autonome Differentialgleichung erster Ordung zurück.

Beispiel 4. Es sei $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$ eine positive reelle Zahl. Man zeige, dass das Anfangswertproblem für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\forall t : f'(t) = a(t)f(t), f(0) = x_0$$

eine eindeutige Lösung ohne Nullstellen hat.

Bemerkung 1: Die Lösungsmethode TdV zeigt nur, dass in einer geeigneten Umgebung von x_0 eine Lösung existiert; auch Eindeutigkeit in einer Umgebung kann man bei genauerer Überlegung aus TdV folgern. Hier ist aber zu zeigen, dass die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

Bemerkung 2: Auch wenn man die Bedingung "ohne Nullstellen" weglässt, gibt es nur eine Lösung. Das ist allerdings schwieriger zu zeigen.