Übung 9 (17.1.2017)

Beispiel 1 (Kettenlinie). Eine Kette von gegebener Länge wird an zwei Punkten aufgehängt. Die Form, die sie durch die Einwirkung der Schwerkraft einnimmt, ist so, daß der Schwerpunkt der Kette so tief wie möglich liegt. Die Formel für die y-Koordinate des Schwerpunkts des Graphen der Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist

$$y_s = \frac{\int_a^b f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}dt}{\int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt}.$$

Man berechne eine Differentialgleichung einer Funktion, deren Graph die Form der Kette hat. (Vom Versuch, die Gleichung zu lösen, wird definitiv abgeraten.)

Beispiel 2 (Atwoods Pendel). Ein eben schwingendes Pendel wird über zwei Rollen durch ein gleich schweres Gewicht nach gezogen (siehe `https://www.youtube.com/watch?v=GKDSljuqE4o`). Man berechne die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels.
(Auch hier wird von Lösungsversuchen abgeraten.)

Beispiel 3 (Doppelpendel). An einem eben schwingenden Pendel wird ein zweites Pendel montiert, das in der gleichen Ebene schwingt (siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum`. Man berechne die Differentialgleichung der Bewegung des Doppelpendels.
(Auch hier wird von Lösungsversuchen abgeraten.)

Beispiel 4. Ein Punkt mit Masse 1 bewegt sich in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und wird dabei vom Nullpunkt angezogen. Die Potentialfunktion hängt nur von der Entfernung zum Nullpunkt ab und läßt sich daher in Polarkoordinaten als $r \mapsto U(r)$ mit $U : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig schreiben. Daraus ergibt sich für die Bewegung die Lagrange-Funktion

$$L(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}) = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2\dot{\phi}^2}{2} - U(r).$$

Es sei $(R, \Phi) : \mathbb{R} \to [0, \infty) \times \mathbb{R}$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung (also eine mögliche Bahn des Punktes).
Man berechne eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion R.
Hinweis: Man verwende den Satz der Energie-Erhaltung und die Euler-Lagrange-Gleichung nach der Variablen ϕ (die Lagrange-Funktion hängt nur von $\dot{phi}$, aber nicht von ϕ ab). Dann eliminiere man die Koordinate Φ.