Übung 8 (9.1.2017)

Beispiel 1. Man suche kline Orbits für as Richtingsfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (-xy, x^2+y^2-20)$. Verwenden Sie das Programm `http://www.falstad.com/vector/`.

Beispiel 2. Man berechne die Richtungsableitung von $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 - 40$ entlang des Richtungsfeldes F von Beispiel 1.

Beispiel 3. Es sei $H : [-1, 1] \to [-1, 1]$ die Funktion $x \mapsto 2x^2 - 1$. Man zeige, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion H^n (n-fache Iteration von H) genau 2^n Fixpunkte hat.

Hinweis: Eventuell ist die trigonometrische Identität $2\cos(\alpha)^2 - 1 = \cos(2\alpha)$ nützlich.

Beispiel 4. Es seien $s, r, b > 0$ reelle Konstanten. Es sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Lorenz-Richtungsfeld $(x, y, z) \mapsto (-s(x - y), rx - y - xz, xy - bz)$. Es sei $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Funktion $(x, y, z) \mapsto rx^2 + sy^2 + s(z - 2r)^2$.

a) Man berechne die Richtungsableitung $\partial_L E$.

b) Man zeige, daß die Menge $J := \{p \in \mathbb{R}^3 \mid \partial_L E(p) \geq 0$ kompakt ist.

c) Man zeige, daß für alle $p \in J$ gilt:

$$E(p) \leq r^2 b + sr^2 b + 4sr^2.$$

d) Man gebe einen sicheren Bereich für L an, das heißt, eine kompakte Menge K, sodass für alle $p \in K$ und für alle $t > 0$ der Fluss $\phi(t, p)$ im Inneren von K liegt.