Übung 8 (10.1.2017)

Beispiel 1. Man untersuche mit dem Programm `http://www.falstad.com/vector/` das Richtungsfeld

$$F(x,y) = (y + 3sin(2x)/2, -x).$$

Schieben Sie den Regler `Field Strength` nach rechts (mindestens ins dritte Drittel). Ist ein Muster zu erkennen? Kehren Sie mit der Schaltfläche `Reverse` das Vorzeichen des Richtungsfeldes um. Welche Auswirkungen auf das Muster ist zu beobachten?
Erklären Sie, was die Beobachtung mit asymptotisch stabilen Zyklen zu tun hat.

Beispiel 2. Gegeben sei das Richtungsfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (-x - y^2 + x^3, -y + xy).$$

Man zeige, daß die Funktion $L : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$ eine Ljapunov-Funktion in einer Umgebung des Nullpunkts ist.
Man bestimme eine beschränkte Umgebung U von $(0,0)$, sodaß $v \in U, t > 0 \implies \phi(t,v) \in U$ gilt.

Beispiel 3. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + \lambda$.
a) Man zeige, daß F_λ für $\lambda \in (-3/4, 1/4)$ zwei Fixpunkte hat, von denen einer stabil ist und der andere nicht.
b) Man zeige, daß F_λ für $\lambda = -1$ einen stabilen 2-Zyklus hat.

Beispiel 4. Die Lotka-Volterra-Gleichung für $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\forall t : x'(t) = x(t)(1 - y(t)),\quad y'(t) = y(t)(x(t) - 1)$$

hat periodische Lösungen, nämlich die Höhenlinien $\{(x,y) \mid x - \ln(x) + y - \ln(y) = c\}$, $c \geq 2$. Für welche Werte von c ist der entsprechende Zyklus stabil bzw. asymptotisch stabil?