Übung 6 (6.12.2016)

Beispiel 1. Man berechne den Fluß des Richtungsfeldes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$. Insbesondere spezifiziere man den Definitionsbereich. Man verifiziere die Funktionalgleichung

$$\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x)$$

für alle s, t, x sodaß die linke Seite definiert ist.

Beispiel 2. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ähnliche Matrizen. Man nehme an, daß für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ die Ungleichung $\langle Bv, Bv \rangle < \langle v, v \rangle$ gilt. Man zeige: es gibt ein positiv definites Skalarprodukt $\langle , \rangle_C : R^n \times \mathbb{R}^n$, sodaß $\langle Av, Av \rangle_C < \langle v, v \rangle_C$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

Beispiel 3. Es sei $\lambda \in (-1, 1)$. Man finde für die Jordan-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein positiv definites Skalarprodukt $\langle , \rangle_C : R^n \times \mathbb{R}^n$, sodaß $\langle Jv, Jv \rangle_C < \langle v, v \rangle_C$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

Beispiel 4. Gegeben sei das Richtungsfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (-x - y + x^2, -y + x + y^2).$$

Man zeige, daß die Funktion $L : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ eine Ljapunov-Funktion ist.
[Es folgt, daß der Punkt $(0, 0)$ ein asymptotisch stabiles Equilibrium ist.] Man bestimme eine beschränkte Umgebung U von $(0, 0)$, sodaß $v \in U, t > 0 \implies \phi(t, v) \in U$ gilt.