Übung 5 (22.11.2016)

Beispiel 1. Welche der folgenden Funktionen $F_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $n = 1, \dots, 4$ erfüllen eine Lipschitzbedingung in der zweiten Variable? Man gebe in diesen Fällen jeweils eine Lipschitz-Konstante an.

$$F_1(x, y) = \sin(x + y), F_2(x, y) = x^2 y + y - 1, F_3(x, y) = |x + y|, F_4(x, y) = xy$$

Beispiel 2. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $T = \mathbb{R}$, Es sei $F : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig in der ersten Variable und Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L in der zweiten Variable. Es seien f und g Lösungen der Differentialgleichung $\forall t : y'(t) = F(t, y(t))$ für $y : T \to \mathbb{R}^n$. Durch Unterteilung des Intervalls $[t_0, t_1]$ finde man eine möglichst kleine reelle Zahl $C > 1$, sodaß für alle $t_0, t_1 \in T$ gilt

$$||f(t_1) - g(t_1)|| \leq C^{|}t_1 - t_0|||f(t_0) - g(t_0)||.$$

Beispiel 3. Es sei F die differenzierbare Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2|x|^{\frac{3}{2}}$. Man schreibe ein Programm zur näherungsweisen Berechnung der Lösung des Anfangswertproblems für $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\forall x : y'(x) = F(y(x)),\ y(0) = 1,$$

mit dem Eulerschen Polygonzugsverfahren.
Welcher Wert von $y(1)$ ergibt sich für $N = 10, 20, 50, 100, 1000$, wobei N die Anzahl der Teilintervalle ist?

Beispiel 4. Lesen Sie den Auszug aus *I. Lakatos: Proofs and refutations, Cambridge University Press, 1976* (Nachwort der Herausgeber J. Worrall und E. Zahar), verlinkt auf der Webseite der Vorlesung. Formulieren Sie eine Behauptung aus diesem Auszug in ein bis zwei Sätzen.