Übung 4 (15.11.2016)

Beispiel 1. Das Tschebyschow-Polynom T_n, $n \in \mathbb{N}$ ist eine spezielle Lösung der Tschebyschow-Gleichung für $y : (-1, 1) \to \mathbb{R}$

$$\forall t \in (-1,1): \quad (1-t^2)y''(t) - ty'(t) + n^2 y(t) = 0.$$

Die ersten Tschebyschow-Polynome sind:

$$T_0(t) = 1,\ T_1(t) = t,\ T_2(t) = 2t^2 - 1,\ T_3(t) = 4t^3 - 3t.$$

Man berechne eine zweite linear unabhängige Lösung für $n = 0, 1$. Eventuell muß im Fall $n = 1$ der Definitionsbereich eingeschränkt werden.

Beispiel 2. Man bestimme die allgemeine Lösung der Gleichung für $\vec{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$\forall t \in \mathbb{R} : \vec{y}'(t) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3. Man berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\forall t : y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t.$$

Beispiel 4. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer. Es sei $L > 0$. Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Bedingung

$$\forall x_1, x_2 \in U : \ |f(x_1) - f(x_2)| \leq L||x_1 - x_2||$$

erfüllt.
Für jedes $x \in U$ definieren wir die Schüttkegel-Funktion $g_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x) - L||y - x||$. Es sei $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $y \mapsto \sup\{g_x(y) \mid x \in U\}$. Man zeige:
1) $\bar{f}$ ist eine Fortsetzung von f.
2) Es gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n : \ |\bar{f}(x_1) - \bar{f}(x_2)| \leq L||x_1 - x_2||.$$