Übung 3 (8.11.2016) Version 2.11. 10:00

Es sei $T = \mathbb{R}$.

Beispiel 1 (angeregte Schwingung). Es seien a, b, ω positive reelle Zahlen. Gegeben ist die lineare Differentialgleichung für $f : T \to \mathbb{R}$

$$\forall t : f''(t) + af'(t) + bf(t) = \cos(\omega t).$$

Man beweise: es gibt genau eine periodische Lösung der Form $f(t) = x\cos(\omega t) + y\sin(\omega t)$, wobei x, y unbestimmte reelle Koeffizienten sind.
Vergleiche auch mit Beispiel 4 von Übung 2.

Beispiel 2. (neue Version, 29.10. 11:15) Man berechne die Exponentialmatrizen $e^{A_{1/2}t}$ für die folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 15 & -12 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 19 & -12 \\ 30 & -19 \end{bmatrix}.$$

Welches asymptotische Verhalten zeigen die Lösungen der Gleichung für $f : T \to \mathbb{R}^2$

$$\forall t : f'(t) = A_1 f(t) \;\text{ bzw. }\; f'(t) = A_2 f(t)?$$

Beispiel 3. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
a) Man zeige:

$$AB = BA \implies e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

b) Man zeige die Formel für die Exponentialmatrix des Jordanblocks

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}; e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^\lambda & te^\lambda & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^\lambda & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^\lambda \\ 0 & e^\lambda & \cdots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}e^\lambda & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}e^\lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^\lambda & te^\lambda \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^\lambda \end{bmatrix}.$$

Der Fall $\lambda = 0$ kann als bekannt vorausgesetzt werden (wurde in der Vorlesung gezeigt).

Beispiel 4. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Man zeige, daß die folgenden Aussagen equivalent sind.
1) Die Differentialgleichung $f'(t) = Af(t)$ für $f : T \to \mathbb{R}^n$ hat bei $0 \in \mathbb{R}^n$ einen stabilen Gechgewichtspunkt.
2) Die Menge $\{e^{At} \mid t \geq 0\}$ ist beschränkt.