Übung 2 (25.10.2016)

Es sei $T = \mathbb{N}$.
Beispiel 1. Gegeben ist die lineare Rekursion für $f : T \to (\mathbb{R}^2)^6$ gegeben durch

$$\forall t : f(t+1) = A\ f(t),$$

$$A\ (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)^\top = \left(\frac{p_6 + p_2}{2}, \frac{p_1 + p_3}{2}, \frac{p_2 + p_4}{2}, \frac{p_3 + p_5}{2}, \frac{p_4 + p_6}{2}, \frac{p_5 + p_1}{2} \right)^\top.$$

Man bestimme die Jordansche Normalform von A. Ist der Nullvektor ein stabiles bzw. asymptotisch stabiles Equilibrium in dieser Rekursion?
Zusatzfrage: Können Sie die Eigenräume erraten?

Beispiel 2. Für welche reellen Parameter λ hat die lineare Rekursion für $f : T \to \mathbb{R}$,

$$\forall t : f(t+2) = f(t+1) + \lambda f(t)$$

einen asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt?

Beispiel 3. Man berechne eine Stammfunktion der Funktion $D \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \frac{1}{x^4 - x^2},$$

wobei $D = (1, \infty)$.

Beispiel 4. Es seien $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ lineare Rekursionsoperatoren in $\mathcal{R}$, deren charakteristische Polynome keinen gemeinsamen Teiler haben. Es sei $\ker(\alpha)$ die Menge aller Folgen $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, die die Rekursiongleichung $\alpha(f) = 0$ lösen. Es sei $b \in \ker(\alpha)$. Man zeige: es existiert genau eine Folge $g \in \ker(\alpha)$, die die inhomogene lineare Rekursionsgleichung $\beta(g) = b$ erfüllt.