Übung 2 (27.10.2015)

Beispiel 1. Für die Lösung des Anfangswertproblems für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\forall x : \ y''(x) = xy(x), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

berechne man die Taylor-Reihe bei 0 mit dem Potenzreihen-Ansatz bzw. dem Exponentialreihen-Ansatz. Können Sie eine Formel (einen geschlossenen Ausdruck) für die Koeffizienten finden?

Übrigens: Man kann zeigen, daß sich die Lösung dieser Differentialgleichung nicht in der Sprache der Lieuville-Erweiterungen darstellen läßt.

Beispiel 2. Es sei $\mathcal{D}_c$ die Menge der Differentialoperatoren von $C^\infty(\mathbb{R})$ nach $C^\infty(\mathbb{R})$. Für jeden Differentialoperator $T \in \mathcal{D}_c$ bezeichnen wir mit $L(T)$ den Vektorraum der Lösungen $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ der Gleichung $T(y) \equiv 0$. Es seien $T_1, T_2 \in \mathcal{D}_c$. Man zeige, daß $T_3 \in \mathcal{D}_c$ existiert, sodaß

$$L(T_3) = L(T_1) \cap L(T_2)$$

gilt.

Beispiel 3. Man berechne $e^{A_r x}$, $x \in \mathbb{R}$, für $r = 1, 2, 3$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} -12 & -16 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Beispiel 4. Man berechne die Lösung $\vec{y} := (y_1, y_2)^t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ des Anfangswertproblems

$$\forall x : y_1'(x) = -12y_1(x) - 16y_2(x), \ y_2'(x) = 9y_1(x) + 12y_2(x),$$

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 0.$$