Übung 10 (19.1.2015)

Beispiel 1. Es seien $a < b, c, d \in \mathbb{R}$. Gesucht ist $f \in C^2([a, b])$, sodaß $f(a) = c$ und $f(b) = d$ ist und das Funktional $g \mapsto \int_a^b g'(x)^2 dx$ minimiert wird. Man stelle für dieses Variationsproblem die Euler-Lagrange-Gleichung auf und löse sie.

Beispiel 2. Man stelle die Euler-Lagrange-Gleichungen für das Funktional $g \mapsto \int_a^b g(x)^2 g'(x) dx$ auf und löse sie.

Beispiel 3. Man berechne die Euler-Lagrange-Differentialgleichung für das Variationsproblem: Gesucht $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, sodaß $\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ minimal wird, unter den Nebenbedingungen

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} = C,$$

$$f(a) = c, f(b) = d,$$

, wobei a, b, c, d, C gegebene reelle Zahlen sind.

Beispiel 4. Man zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ die Euler-Lagrange-Differentialgleichung in Beispiel 3 löst.