Übung 9 (12.1.2015)

Beispiel 1. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$(x, y) \mapsto (y - x(x^2 + y^2) + x, -x - y(x^2 + y^2) - y)$$

(es ist F_λ aus der Vorlesung vom 16.12. für $\lambda = 1$). Es sei $V := (0, \infty) \times \mathbb{R}$, und H die x-Achse. Man berechne die Poincaré-Abbildung $\Phi : (V \cap H) \to (V \cap H)$.

Beispiel 2. Gegeben ist das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \mapsto (-16x + (x + y)^2 + x(16xy - (x + y)^3/3)/12, 16y - (x + y)^2 + y(16xy - (x + y)^3/3)/12).$$

a) Man berechne den topologischen Typ des Gleichgewichtspunkts $(0, 0)$ (Quelle, Senke, oder Sattelpunkt).
b) Man zeige, daß die Kurve definiert durch die Gleichung $g(x, y) = 16xy - (x + y)^3/3 = 0$ einen homoklinen Orbit enthält.
Hinweis: Man berechne $\delta_F(g)$ an allen Nullstellen von g.
c) Man untersuche numerisch (mit dem Programm `vector`) das asymptotische Verhalten der Orbits mit Startwert im Innern der Schleife der Kurve $16xy - (x + y)^3/3 = 0$. (Bei der Eingabe in das Programm muß Multiplikation mit $*$ und Potenzieren mit $\wedge$ bezeichnet werden.)

Beispiel 3. Man gebe das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \mapsto (33x - x^3 - y^3, 33y + x^3 - y^3)$$

in das Programm `vector` ein und schiebe den Regler für `Field Strength` langsam nach rechts. Was ist zu sehen? Wie ist das zu erklären?
Ein ähnliches, aber kompliziertes Bild zeig das Richtungsfeld $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \mapsto (\sin(x) \sin(xy) + \sin(y), \sin(y) \sin(xy) + \sin(x)).$$

Klicken Sie hier auf die Schaltfläche `Reverse`.

Beispiel 4. Man berechne alle Gleichgewichtspunkte des Richtungsfelds $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) \mapsto \left(y + \frac{3\sin(2x)}{2}, -x\right)$$

und bestimme jeweils den topologischen Typ. Danach gehe man vor wie in Beispiel 2: `Field Strength` langsam nach rechts, Schaltfläche `Reverse`.