Übung 8 (15.12.2014)

Beispiel 1. Man berechne eine Ljapunov-Funktion für das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = (-x + xy^2, -y + x^2y)$$

bei $(0, 0)$, i.e., eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sodaß g bei $(0, 0)$ ein lokales Maximum und $\delta_F(g)$ bei $(0, 0)$ ein lokales Minimum hat. Man gebe eine Umgebung von $(0, 0)$ an, sodaß die Einschränkungen der beiden Funktionen globales Mininum bzw. Maximum bei $(0, 0)$ haben.
Man verwende die Funktion, um eine offene Umgebung U' von $(0, 0)$ zu finden, sodaß Lösungen mit Startwert in U' for positive t in U' bleiben und für $t \to \infty$ gegen $(0, 0)$ konvergieren.

Beispiel 2. Man berechne den Grenzwert (falls existent) der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$x_{n+1} := x_n + \frac{1}{4(1 + x_n^2)} - \frac{1}{8}$$

für Startwerte $x_0 = -2, x_0 = -\frac{1}{2}, x_0 = 0, x_0 = 5$.

Beispiel 3. Man beweise, daß eine quadratische Funktion

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

höchstens $\frac{2^k - 1}{k}$ k-Zyklen haben kann.

Beispiel 4. Man beweise, daß jede stetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die einen Zyklus hat, auch einen Fixpunkt hat.