Übung 7 (8.12.2014)

Alle Richtungsfelder auf diesem Übungszettel sind auf $\mathbb{R}^2$ definiert.
Beispiel 1. Man transformiere das Richtungsfeld

$$F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

mit der Transformation

$$T : (x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = (x_1, x_2 + x_1^2),$$
$$T^{-1} : (y_1, y_2) \mapsto (x_1, x_2) = (y_1, y_2 - y_1^2).$$

Beispiel 2. Man visualisiere mit dem Programm `vector` die Richtungsfelder

$$F(x, y) = (cos(xy), sin(x + y + 1)),$$

$$G(x, y) = (sin(x + y), sin(x - y)).$$

(Floor Streamlines, Display Particles) in der Nähe von $(0, 0)$. Zum "Hineinzoomen" verwende man das abgewandelte Richtungsfeld

$$F_n(x, y) = ncos(xy/n^2, x/n + y/n + 1)$$

(analog für G) für $n = 10, 20, 40, \ldots$

Beispiel 3. Man berechne eine Ljapunov-Funktion für das Vektorfeld

$$F(x, y) = (-x + x^2, -y + y^2)$$

bei $(0, 0)$, i.e., eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sodaß g bei $(0, 0)$ ein lokales Maximum und $\delta_F(g)$ bei $(0, 0)$ ein lokales Minimum hat. Man gebe eine Umgebung von $(0, 0)$ an, sodaß die Einschränkungen der beiden Funktionen globales Mininum bzw. Maximum bei $(0, 0)$ haben.
Man verwende die Funktion, um eine offene Umgebung U von $(0, 0)$ zu finden, sodaß Lösungen mit Startwert in U for positive t in U bleiben und für $t \to \infty$ gegen $(0, 0)$ konvergieren.

Beispiel 4. Man berechne die Gleichgewichtspunkte und den Typ (Klasse bezüglich topologischer Äquivalenz) aller hyperbolischen Gleichgewichtspunkte von

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1, xy).$$