Übung 1 (27.10.2014)

Beispiel 1. Man berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in (a) bzw. $y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ in (b):

$$a) y'(t) = e^{t+y(t)}$$

$$b) y'(t) = y(t)^{\lambda} t^{\mu},$$

jeweils für alle t im Definitionsbereich, wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Parameter sind.

Beispiel 2. Man berechne die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $y : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$

$$y'(x) = \frac{y(x)^2}{x^2} + \frac{y(x)}{x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Beispiel 3. Es sei $(x_n)_n$ die Fibonacci-Folge, definiert durch

$$x_0 = x_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}: \; x_{n+2} = x_n + x_{n+1}.$$

Man berechne x_{64} ohne Computer/Taschenrechner.
Hinweis: Man reduziere auf eine vektorwertiges Rekursion der Form

$$\vec{y}_{n+1} = A\vec{y_n}$$

mit geeigneter 2×2 Matrix A und Anfangswert $\vec{y_0} = \binom{1}{1}$.

Beispiel 4. Es sei $(x_n)_n$ die Folge definiert durch

$$x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}: \; x_{n+3} - 3x_{n+2} + 2x_{n+1} = 0.$$

Man berechne eine Formel für x_n.