JOHANNES KEPLER
UNIVERSITY LINZ

Gewöhnliche Differentialgleichungen
und
Dynamische Systeme
Appendix: Sturm-Lieuville-Theorie

Josef Schicho

14. Januar 2023

1 Dynamische Systeme in unendlicher Dimension

Bei allen dynamischen Systemen, die wir bisher betrachtet haben, läßt sich der Zustand eines Systems zu einer bestimmten Zeit durch einen Vektor in einem endlich-dimensionalen Vektorraum beschreiben. Wir gehen nun davon ab und lassen auch Funktionen als Zustand zu: der Zustand zu einer fixen Zeit kann zum Beispiel eine Funktion von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ sein (mit bestimmten Eigenschaften, auf die wir noch zu sprechen kommen). Die zeitliche Entwicklung des Zustands ist dann durch eine Funktion $u : ([0, \infty) \times \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ gegeben. Wir wollen, dass zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, \infty)$ die zeitliche Entwicklung nach t nur von der Funktion $u_t : x \mapsto u(t, x)$ abhängt.
Als Beispiel betrachten wir die Diffusionsgleichung oder Wärmeleitungsgleichung für $u : (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$$\forall t, x : \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \Delta(u)(t, x), \tag{1}$$

für u, wobei der Laplace-Operator Δ als

$$\Delta(u)(t, x_1, x_2, x_3) := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u(t, x_1, x_2, x_2)}{\partial x_i^2}$$

definiert ist. Diese Gleichung tritt zum Beispiel auf, wenn $u(x, t)$ die Temparatur eines Mediums an der Stelle x zum Zeitpunkt t ist. Wie man sieht, handelt es sich hier um eine partielle Differentialgleichung, also nicht Stoff dieser Vorlesung; es besteht aber doch ein Zusammenhang mit gewöhnlichen Differentialgleichungen.
Strukturell besteht eine Ähnlichkeit zur linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten $f' = Af$: anstatt einer Matrix haben wir den linearen Operator Δ, der Zustandsvektoren auf Zustandsvektoren abbildet. Aus der Theorie der linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die uns ja wohlbekannt ist, könnten wir auf die Idee kommen, dass die Lösungen der Diffusionsgleichung Linearkombinationen von Basislösungen der Form $u(x, t) = e^{\lambda t} v(x)$ sind, wobei λ ein Eigenwert von Δ und $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein dazugehöriger Eigenvektor ist. Um ein Anfangswert-Problem zu lösen, müssen wir dann nur noch den gegebenen Anfangsvektor als Linearkombination von Eigenvektoren darstellen; hier setzen wir voraus, dass keine grösseren Jordan-Blöcke als 1×1-Matrizen existieren, also dass die Matrix komplex diagonalisierbar ist.
Im unendlich-dimensionalen Fall kann es schwierig sein, einen gegebenen Anfangsvektor als Linearkombination von Eigenvektoren darzustellen, wenn so eine Darstellung überhaput existiert. Aber der Laplace-Operator – wieder eingeschränkt auf eine günstige Menge von Funktionen – ist hermitesch, d.h. er erfüllt $\langle f, \Delta g\rangle = \langle \Delta f, g\rangle$ für ein geeignetes Skalarprodukt. Für hermitesche Matrizen A gilt folgendes:

- Die Eigenwerte sind reell.
- Die JNF ist diagonalierbar.
- Die Eigenvektoren von verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.

- Wenn $(b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis ist, dann hat jeder Vektor v die Darstellung

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle b_i.$$

Diese sehr explizite Formel läßt sich auf den unendlichdimensionalen Fall verallgemeinern. Das geeignete Konzept dazu nennt sich *Hilbert-Raum*: ein $\mathbb{R}$-Vektorraum H mit einem positiv definitem Skalarprodukt $(H \times H) \to \mathbb{R}$, der zusätzlich ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der Norm $||v|| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ist.

Beispiel 1.1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle (z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \rangle = z_1 w_1 + \dots + z_n w_n$$

ein Hilbertraum.

Beispiel 1.2. Es sei ℓ^2 der Raum aller Folgen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die quadratisch konvergent sind, also alle Folgen $(a_i)_i$ sodass $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$ existiert. Zusammen mit der Metrik

$$\langle (a_i)_i, (b_i)_i \rangle := \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i$$

ist ℓ^2 ein Hilbertraum.

Die Hilberträume, den wir hier brauchen, sind Funktioenräume, mit einem Integral als Skalarprodukt.

Eine Orthonormalbasis eines Hilbertraums ist eine maximale Menge von Vektoren der Länge 1, sodass zwei immer Skalarprodukt Null haben. Wenn der Hilbertraum unendliche Dimension hat, dann ist eine Orthonormalbasis keine Vektorraum-Basis. Man sieht das gut im Beispiel ℓ^2: die Menge aller Folgen $(\delta_{i,j})_j$, die genau einen Wert 1 und sonst nur Wert Null haben, bilden eine Orthonormalbasis. Sie erzeugen aber nur einen echten Teilraum von ℓ^2, nämlich dern Unterraum der Folgen, die ab einem genügend großen Inden Null sind.

Kehren wir zurück zur Wärmeleitungsgleichung. Die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren führt zur Differentialgleichung für v: $\Delta(v) = \lambda v$, wobei λ ein noch unbekannter Parameter ist (der Eigenwert). Das ist leider immer noch partiell, drum setzen wir $n = 1$. Aus dem Laplace-Operator wird dann die zweite Ableitung und die Differentialgleichung für die Bestimmung der Eigenwerte lautet: $\forall x : u''(x) = \lambda u(x)$.
Um zu erreichen, dass Δ selbst-adjungiert ist, nehmen wir an, dass u die Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ erfüllt. Dann gilt für $u, v \in \mathcal{C}^2([0,1])$ - also für alle Funktionen $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$, die zweimal stetig differenzierbar sind:

$$\int_0^1 u(x) v''(x) dx = u(0)v'(0) - u(1)v'(1) - \int_0^1 u'(x) v'(x) dx,$$

$$\int_0^1 u''(x)v(x)dx = u'(0)v(0) - u'(1)v(1) - \int_0^1 u'(x)v'(x)dx.$$

Es sei $V \subset \mathcal{C}^2([0,1])$ der Teilraum, der Funktionen f, die die Randbedingungen $f(0) = f(1) = 0$ erfüllen. Dann gilt $\langle u, \Delta v\rangle = \langle \Delta u, v\rangle$ für alle $u, v \in V$ und für die Norm $\langle u, v\rangle := \int_0^1 u(x)v(x)dx$.

Leider ist V nicht vollständig bezüglich der gewählten Norm. Wir können V aber in einen Hilbertraum H einbetten, sodass V dicht in H liegt. Diese Vervollständigung ist im wesentlichen eindeutig (bis auf einen Vektorraum-Isomorphimus, der das Skalarprodukt erhält). Der Raum H heisst auch $L^2([0,1])$ und besteht aus Equivalenzklassen von Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, für die $\int_0^1 f(x)^2 dx$ definiert ist, also von quadratisch integrierbaren Funktionen. Zwei Funktionen f, g sind equivalent, wenn die Menge $\{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ eine Nullmenge ist. Eine Teilmenge $P \subset [0,1]$ heisst Nullmenge, wenn das Integral der Indikator-Funktion 1_P gleich Null ist. Dabei ist $1_P(x) = 1$ wenn $x \in P$ und $1_P(x) = 0$ sonst. Beispiele von Nullmengen sind die leere Menge, jede endliche Menge, oder jede abzählbare Menge.

Stetige Funktionen sind bekanntlich immer quadratisch integrierbar, und eine Equivalenzklasse kann höchstens eine stetige Funktion enthalten (warum?). Wir haben aber auch Klassen, in denen nur stückweise stetige Funktionen enthalten sind, also Funktionen, für die man eine Unterteilung in endlich viele oder abzählbar viele Intervalle, sodass die Funktion in jedem Intervall stetig ist. Die Funktionswerte an den Randpunkten der Intervalle können beliebig gewählt werden, die bilden ja eine Nullmenge.

Ein weiterer Wermutstropfen ist die Tatsache, dass Δ nicht auf ganz H definiert werden kann, sondern nur auf einem dichten Teilraum. Für lineare Operatoren, die nur auf einem dichten Teilraum definiert sind, kann man die Definition der Selbstadjungiertheit sinnvoll erweitern (die genaue Definition ist nicht ganz einfach). Es stellt sich heraus, dass Δ selbstadjungiert ist.

Die reelle Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn das Randwertproblem für $u : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$\forall x : u''(x) - \lambda(x) = 0, u(0) = u(1) = 0$$

eine nichttriviale Lösung hat. Wenn wir die Bedingung $u(1) = 0$ weglassen, dann haben wir ein Anfangswertproblem, deren Lösungen konstante Vielfache einer Basislösung v_λ sind. Die Basislösung ist

$$v_\lambda(x) = e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x} \text{ falls } \lambda > 0,$$

$$v_\lambda(x) = x \text{ falls } \lambda = 0,$$

$$v_\lambda(x) = \sin(\sqrt{|\lambda|}x) \text{ falls } \lambda < 0.$$

Wenn $v_1(1) = 0$ sein soll, dann folgt $\lambda = -\pi^2 n^2$ und $v_\lambda(x) = \sin(n\pi x)$. Wir kennen nun die Eigenwerte und Eigenvektoren; wir schreiben v_n statt $v_{-\pi^2 n^2}$. Die Länge der Eigenvektoren ist nicht 1, sondern 1/2 – um zu normieren, müssten wir mit $\sqrt{2}$ multiplizieren.

Man kann zeigen, dass die normierten Einheitsvektoren bilden ein Orthonormalsystem von H. Es sei $u_0 \in H$ eine gegebene Funktion (die Anfangsfunktion $u(0,x)$ in der Wärmeleitungsgleichung). Wir setzen

$$a_n := 2\langle u_0, v_n\rangle = 2\int_0^1 u_0(x)\sin(n\pi x)dx. \tag{2}$$

Dann gilt $u_0 = \sum_{n=1}^\infty a_n v_n$. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit Anfangsfunktion u_0 und Randbedingungen $u(t,0) = u(t,1) = 0$ ist dann

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^\infty \langle u_0, v_n\rangle e^{-\pi^2 n^2 t}\sin(n\pi x). \tag{3}$$

Für alle $t > 0$ konvergiert die Reihe $u_t := \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi^2 n^2 t} a_n v_n$, mit Ergebnis in H. Dies ist eine Konsequenz aus dem Majorantenkriterium – dieses gilt auch im Hilbertraum – und der Tatsache $|e^{-\pi^2 n^2 t}| \leq 1$. Für $t < 0$ kann die Reihe divergieren: Wärmeverteilungen lassen sich im allgemeinen nicht in die Vergangenheit zurückverfolgen.
Die Darstellung einer Funktion (eigentlich: einer Klasse von quadratisch integrierbaren Funktionen) als Sinusreihe steht in Beziehung zur besser bekannten Fourier-Reihe. Wenn $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ quadratisch integrierbar ist, definieren wir

$$b_0 := 1/2\int_0^1 u_0(x)dx, b_n := \int_0^1 u_0(x)\cos(n\pi x)dx, c_n := \int_0^1 u_0(x)\sin(n\pi x)dx$$

für positive ganze n. Die Reihe

$$g(x) := b_0 + \sum_{n=1}^\infty b_n\cos(n\pi x) + \sum_{n=1}^\infty c_n\cos(n\pi x)$$

konvergiert für fast alle $x \in [-1,1]$, und der Grenzwert stimmt mit $f(x)$ überein; es kann Ausnahmen geben, aber diese bilden eine Nullmenge.
Die Beziehung von Sinusreihe und Fourier-Reihe ist folgende: es sei $u_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ in H und a_n die Koeffizienten der Sinusreihe (2). Wir definieren $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = u_0(x)$, $f(-x) = -u_0(x)$ für $x > 0$. Dann ist f eine ungerade Funktion, und es folgt $b_n = 0$ und $c_n = a_n$.

Wir wollen uns – auch anhand des Beispiels oben – klar machen, dass wir einen Wechsel im Typ des Zustandsvektors u_t machen mussten. Zu Beginn war der Zustand u_t eine Funktion $[0,1] \to \mathbb{R}$, die zweimal stetig differenzierbar sein muss (damit die Differentialgleichung Sinn macht). Wir haben Glück, dass es einen Satz gibt, der garantiert, dass solche Funktionen eine konvergente Entwicklung in eine Sinusreihe besitzen; wenn u_t nur stetig wäre, dann wäre nicht einmal das garantiert. Im Nachhinein stellen wir fest, dass es besser ist, Klassen von quadratisch integrierbaren Funktionen als Zustandsvektoren zuzulassen: mit anderen Worten, die Anfangsverteilung muss nicht einmal stetig sein.
Das hat Konsequenzen für die Sichtweise auf die Zustände. Das einfachste, was man mit Funktionen machen kann, ist die Auswertung an einer Stelle in $[0,1]$. Bei Klassen von

quadratisch integrierbaren Funktionen ist das problematisch, ein einzelner Punkt ist eine Nullmenge und der Wert in jeder Nullmenge kann variieren ohne dass wir die Klasse ändern. Auf der anderen Seite können wir unsere Zustände mit einem vorgegebenen Vektor multiplizieren und eine Zahl erhalten (den Koeffizienten der Sinusreihe).

Aufgabe 1.1. Man plotte die Anfangsfunktion $u_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$u_0(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) - \frac{1}{5}\sin(5\pi x) - \frac{1}{7}\sin(7\pi x) + \frac{1}{9}\sin(9\pi x) + \frac{1}{11}\sin(11\pi x)$$

sowie die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung (3) für einige Werte von t im Intervall $[0, 1/10]$.
b) Man erstelle eine Animation.
c) Was passiert für negative Werte von t?

Aufgabe 1.2. Man löse die Wärmeleitungsgleichung (1) für eine gegebene Anfangsfunktion $x \mapsto u(0,x)$ mit geänderter Randbedingung.
a) $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0$.
b) $u(0) = u(1)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,1)$.

Aufgabe 1.3. Diese Aufgabe setzt voraus, dass man vorher schon Aufgabe 1.2 gelöst hat. Die Anfangsfunktionen $u_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2(x-1)^2$ erfüllt sowohl die Randbedingung $u_0(0) = u_1(0) = 0$ als auch die Randbedingungen in (a) und (b) in Aufgabe 1.2. Wir haben also drei Formeln für die Lösung zur Auswahl. Man vergleiche die Ergebnisse - stimmen sie überein?
Hinweis: verwenden Sie zum Berechnen der Integrale und zum Plotten der Ergebnisfunktion z.B. für $t = 0.2$ ein Computeralgebra-System. Versuchen Sie nicht, die Antwort auf die Frage oben zu erraten!

Aufgabe 1.4. Der menschliche Hörsinn ist fähig, die Koeffizienten der Fourier-Reihe eine Luftdruck-Funktion (Schall) zu hören. Die Unterscheidung zwischen Koeffizienten, die zu verschiedenen Perioden gehören, funktioniert ziemlich gut. Die Unterscheidung zwischen b_n und c_n ist kaum ausgeprägt, aber doch vorhanden (siehe `https://de.wikipedia.org/wiki/Duplex-Theorie`).
Die Sägezahn-Funktion $u(x) = x$ in $[-1, 1]$ hat Fourier-Reihe

$$u(x) = \frac{-2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n\pi x)}{n}.$$

Man plotte einige Partialsummen dieser Reihe und vergleiche mit den Partialsummen der Reihe

$$v(x) = \frac{-2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi x)}{n}.$$

Welche Eigenschaften der Grenzfunktion v lassen sich erkennen?