

# 1 Verschiedene Typen von Dynamischen Systemen

Ein dynamisches System ist ein mathematisches Modell eines Prozesses durch Funktionen von einer Menge  $T$  (Zeit) in einen Raum  $X$ . Die Menge  $T$  ist entweder gleich  $\mathbb{R}$  bzw. ein Intervall von  $\mathbb{R}$  (kontinuierliches dynamisches System) oder gleich  $\mathbb{N}$  (diskretes dynamisches System). Der Raum  $X$  ist meistens ein reeller endlich-dimensionaler Vektorraum – bei linearen dynamischen Systemen ist das unabdingbar – oder eine Teilmenge eines Vektorraumes. Das Wesentliche ist, dass die Funktion (manchmal auch eine Menge von Funktionen) nicht durch einen expliziten Ausdruck beschrieben wird, sondern im diskreten Fall durch eine Rekursion und im kontinuierlichen Fall durch eine Differentialgleichung.

Wir beginnen mit dem diskreten Fall:  $T = \mathbb{N}$ , und  $X \subset \mathbb{R}$  oder  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Die Funktion  $f : T \rightarrow X$  wird beschrieben durch die Rekursionsgleichung der Ordnung  $k > 0$ , die wie folgt aussieht:

$$\forall t \in T : f(t+k) = F(f(t), f(t+1), \dots, f(t+k-1), t),$$

wobei  $F : (X^k \times T) \rightarrow X$  eine gegebene stetige Funktion ist. Sobald die Anfangswerte  $f(0), f(1), \dots, f(k-1)$  bekannt sind, ist die Funktion  $f$  eindeutig festgelegt und kann mit einem Programm rekursiv an jeder natürlichen Zahl ausgewertet werden.

Sehr oft ist man in der Situation, daß der Wert  $F(x_0, \dots, x_{k-1}, t)$  nicht von  $t$  abhängt, also dass man eigentlich eine Funktion  $F : X^k \rightarrow X$  hat. Wir sprechen in diesem Fall von einer autonomen (zeitunabhängigen) Rekursion. Der nicht-autonome Fall entspricht eigentlich nicht der "Philosophie" der dynamischen Systeme: wenn wir zeitabhängige Rekursionen erlauben, können wir ja auch gleich einen Ausdruck für die Funktion in die Rekursion stecken:

$$F(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, t) := A(t),$$

und hätten dann eine explizite Darstellung  $f(t) = A(t)$ . Genau das, was wir in der Theorie der dynamischen Systeme ja ausschließen wollten. Drum ist der autonome Fall der normale Fall.

Wenn uns jetzt eine nicht-autonome Rekursion über den Weg läuft und wir trotzdem philosophisch auf der Linie der dynamischen Systeme bleiben wollen, dann ist das möglich: der nicht-autonome Fall läßt sich immer auf den autonomen Fall zurückführen. Außerdem können Rekursionen beliebiger Ordnung immer auf Rekursionen erster Ordnung zurückgeführt werden. Beide Rückführungen sind nicht gratis, sie gehen auf Kosten höherer Dimension  $n$  des Wertebereichs von  $f$ .

Wir beschreiben zuerst die Rückführung einer nicht-autonomen Rekursion erster Ordnung für eine Funktion  $f : T \rightarrow X$ , gegeben durch die Funktion  $F : (X \times T) \rightarrow X$ ; als Rekursion für  $f$  liest sich das so:

$$\forall t \in T : f(t+1) = F(f(t), t). \tag{1}$$

Wir definieren nun  $Y := X \times T$  und die Funktion

$$G : Y \rightarrow Y, (x, t) \mapsto (F(x, t), t+1),$$

die eine Rekursion für  $g : T \rightarrow Y$  definiert:

$$\forall t \in T : g(t+1) = G(g(t)). \tag{2}$$

Wenn nun  $f : T \rightarrow X$  die Rekursion 1 erfüllt, dann erfüllt die Funktion  $(x, t) \mapsto (f(t), t)$  die Rekursion 2. Umgekehrt: wenn  $g : T \rightarrow Y$  die Rekursion (2) erfüllt und einen Startwert  $g(0)$  mit  $t$ -Komponente gleich 0 hat, dessen  $t$ -Komponente gleich 0 ist, dann ist die erste Komponente von  $g$  eine Lösung von Rekursion (1) und die zweite Komponente ist die Identität  $t \mapsto t$ . Bei Rekursionen höherer Ordnung funktioniert eine ähnliche Rückführung (wobei es beim Ausdenken einer Rekursion für die Zeitkomponente ein bisschen Platz für Kreativität gibt).

Nun beschreiben wir die Rückführung einer autonomen Rekursion von Ordnung  $k > 1$  für eine Funktion  $f : T \rightarrow X$ , gegeben durch eine Funktion  $F : X^k \rightarrow X$  und als Rekursion geschrieben

$$\forall t \in T : f(t+k) = F(f(t), f(t+1), \dots, f(t+k-1)), \tag{3}$$

auf eine Rekursion erster Ordnung. Wir definieren  $Y := X^k$  und die Funktion

$$G : Y \rightarrow Y, (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, F(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})).$$

Diese definiert wieder eine Rekursion für  $g : T \rightarrow Y$ ; die Rekursionsgleichung ist die gleiche wie in (2). Wenn  $f : T \rightarrow X$  nun die Rekursion 3 erfüllt, dann erfüllt die Funktion  $t \mapsto (f(t), f(t+1), \dots, f(t+k-1))$  die Rekursion (2). Wenn umgekehrt  $g$  die Rekursionsgleichung (2) erfüllt, dann erfüllt jeder ihrer  $k$  Komponenten die Rekursion (3).

## 1.1 Lineare Rekursionen

Es sei nun  $X$  ein reeller Vektorraum. Eine nicht-autonome Rekursion gegeben durch eine Funktion  $F : (X^k \times T) \rightarrow X$  heißt linear, wenn für jedes  $t \in T$  die Funktion  $(x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto F(x_0, \dots, x_{k-1}, t)$  linear ist. Die Lösungen bilden einen Vektorraum der Dimension  $k \dim X$ ; die Abbildung, die jedem  $k$ -Tupel von Anfangswerten  $(x_0, \dots, x_{k-1}) \in X^k$  die eindeutig bestimmte Lösung der Rekursion mit diesen Anfangswerten zuordnet, ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Die oben beschriebene Rückführung auf eine Rekursion erster Ordnung liefert in der Tat eine lineare Rekursion erster Ordnung. Beschränken wir uns daher (vorläufig) auf lineare Rekursionen erster Ordnung. Es sei  $X = \mathbb{R}^n$ . Dann kann man die Funktion  $F$  auch schreiben als matrixwertige Funktion  $A : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , also  $F(x_0, \dots, x_{k-1}, t) := A(t) \cdot (x_0, \dots, x_{k-1})$ . Der Vektorraum-Isomorphismus zwischen Anfangswerten und Lösungen läßt sich ebenfalls als matrixwertige Funktion  $B : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  schreiben. Die Lösung  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Rekursion

$$\forall t \in T : f(t+1) = A(t)f(t)$$

läßt sich dann schreiben als

$$g(t) = B(t)(g(0), \dots, g(k-1)).$$

Die Matrix  $B$  erfüllt die Gleichungen

$$\forall t : B(t+1) = A(t)B(t), \quad B(0) = I_n.$$

Die Matrix  $B(t)$  kann berechnet werden durch Aufmultiplizieren der Matrizen  $A(0), \dots, A(t-1)$  von rechts nach links.

Im autonomen Fall ist das alles viel einfacher: statt einer matrixwertigen Funktion haben wir eine einzige Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , und  $B(t) = A^t$ . Diesen Fall werden wir später noch genauer studieren.

**Bemerkung 1.1.** Wie erwähnt, lassen sich nicht-autonome Rekursionen immer auf autonome Rekursionen zurückführen. Leider wird bei dieser Reduktion die Linearität nicht beibehalten, drum ist die Theorie der nicht-autonomen linearen Rekursionen (bzw. im kontinuierlichen Fall die Theorie der nicht-autonomen linearen Differentialgleichungen) komplizierter als die Theorie der autonomen linearen Rekursionen (bzw. der autonomen linearen Differentialgleichungen).

Wenn nichts dazugesagt wird, verstehen wir unter einer "linearen Rekursion" eine homogene lineare Gleichung. Die inhomogene lineare Rekursion für  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  sieht so aus:

$$\forall t \in T : f(t+1) = A(t)f(t) + b(t),$$

wobei  $A : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  eine gegebene matrixwertige Funktion und  $b : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine gegebene vektorwertige Funktion ist. Es ist nicht schwierig, eine solche inhomogene Rekursion zurückzuführen auf eine homogene lineare Rekursion für  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ; die ersten  $n$  Komponenten dieser neuen Rekursion bilden  $f$ , und die letzte ist konstant 1.

## 2 Kontinuierliche Dynamische Systeme

Hier ist  $T = \mathbb{R}$  oder eine zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}$  (also ein Intervall);  $X$  ist wieder ein endlich-dimensionaler reellen Vektorraum oder eine Teilmenge eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraums. Eine Funktion  $f : T \rightarrow X$  wird in diesem Fall beschrieben durch eine Differentialgleichung der Ordnung  $k > 0$ :

$$\forall t \in T : f^{(k)}(t) = F(f(t), f'(t), \dots, f^{(k-1)}(t), t), \quad (4)$$

wobei  $F : (X^k \times T) \rightarrow X$  eine gegebene stetige Funktion ist. Im Unterschied zum diskreten Fall ist überhaupt nicht klar, ob die Funktion durch Anfangswerte eindeutig festgelegt ist. Der fundamentale Satz von Picard/Lindelöf, den wir beweisen und ausführlich werden, besagt, daß unter gewissen Voraussetzungen für  $F$  die Lösung  $f$  der Differentialgleichung eindeutig durch die Anfangswerte  $f(0), f'(0), \dots, f^{(k-1)}(0)$  festgelegt ist, und auch daß für gegebene Anfangswerte immer eine Lösung existiert.

In anderer Hinsicht ist die Theorie der kontinuierlichen Systeme dafür wieder einfacher als die diskrete Theorie. Zum Beispiel kann man im kontinuierlichen Fall sehr einfach “die Zeit umdrehen” und ein lineares System aufstellen, das in die Vergangenheit schaut. Man braucht dazu nur in der Differentialgleichung  $t$  durch  $-t$  ersetzen. Im diskreten Fall kann man die Rekursionen nicht nach rückwärts verfolgen, weil zum Beispiel die Funktion  $F : X \rightarrow X$  in der Rekursion  $\forall t : f(t+1) = F(f(t))$  im allgemeinen nicht invertierbar ist.

Die oben besprochenen Rückführungen für den diskreten Fall lassen sich auch auf den kontinuierlichen Fall übertragen. So kann man eine nicht-autonome Differentialgleichung für  $f : T \rightarrow X$

$$\forall t \in T : f'(t) = F(f(t), t)$$

zurückführen auf eine autonome Gleichung für  $g : T \rightarrow X \times T$ . Und man kann eine Differentialgleichung der Ordnung  $k$  für  $f : T \rightarrow X$

$$\forall t \in T : f^{(k)}(t) = F(f(t), f'(t), \dots, f^{(k-1)}(t)), \quad (5)$$

auf eine Differentialgleichung erster Ordnung für  $g : T \rightarrow X^k$  zurückführen. Im letzteren Fall bleibt Linearität erhalten, im ersteren nicht.

## 3 Zusammenhang zwischen diskreten und kontinuierlichen Systemen

Es gibt mehrere Querverbindungen zwischen dem diskreten und dem kontinuierlichen Fall.

- Falls in einer autonomen Differentialgleichung Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems für  $f : \mathbb{R} \rightarrow X$

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = F(f(t))$$

erfüllt ist, haben wir für jede Schrittweite  $h > 0$  eine Funktion  $G : X \rightarrow X$ , sodass für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Gleichung  $f(t+h) = G(f(t))$  gilt. Die Funktion  $G$  berechnet also den Wert nach Zeiteinheit  $h$  und stellt eine Diskretisierung der Differentialgleichung dar. Die Lösungen der Rekursion für  $g : \mathbb{N} \rightarrow X$ ,  $\forall t \in \mathbb{N} : g(t+1) = G(g(t))$  sind Folgen  $(f(t_0), f(t_0+h), f(t_0+2h), \dots)$  von Funktionswerten der Lösung der Differentialgleichung.

- Für kleine numerische Werte von  $h$  kann ein  $G$  wie oben approximativ berechnet werden. Auf diese Weise erhält man numerische Verfahren zum Auswerten von Lösungen von Anfangswertproblemen.
- Wenn die Lösungen einer Differentialgleichung bei 0 analytisch sind – das heißt, dass alle Ableitungen bei 0 existieren und die Taylorreihe in einem geeigneten Konvergenzbereich gegen die Funktion konvergiert –, dann bilden die Ableitungen bei 0 eine Folge. Diese Folge erfüllt eine Rekursion, die sich oft direkt aus der Differentialrechnung berechnen läßt.

- Umgekehrt kann man aus einer Folge, die eine Rekursion löst, eine Potenzreihe bilden und hoffen, daß die Potenzreihe konvergiert. Wenn ja, dann erfüllt sie oft eine Differentialgleichung, die sich direkt aus der Rekursion ableiten läßt.
- Bei der qualitativen Beschreibung von Lösungen von Differentialgleichung für  $t \rightarrow \infty$  gibt es eine wichtige Methode, die wir noch diskutieren werden: man bildet eine Durchschnittsmenge  $H \subset X$  und untersucht die Folge der Schrittpunkte einer Lösung in der zeitlichen Reihenfolge. Diese Folge erfüllt ebenfalls eine Rekursion, und qualitative Eigenschaften dieser Rekursion hängen eng zusammen mit qualitativen Eigenschaften der zu untersuchenden Differentialgleichung.

## 4 Skalare autonome Differentialgleichungen

Hier ist  $T = \mathbb{R}$ . Gegeben ist eine stetige Funktion  $F : T \rightarrow X$ , und gesucht ist  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, sodaß

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = F(f(t)) \quad (6)$$

gilt. Bevor wir uns konkreten Lösungsverfahren zuwenden, wollen wir versuchen, qualitativ etwas über die Lösung auszusagen ohne die Lösung tatsächlich zu berechnen. Numerische und exakte Methoden zur Lösung werden später noch besprochen.

Das asymptotische Verhalten der Lösung wird durch das Vorzeichen von  $F$  bestimmt: wenn für ein  $t_0 \in T$  der Wert  $F(f(t_0))$  positive bzw. negativ ist, dann ist die Funktion bei  $t_0$  streng monoton steigend bzw. fallend. Wenn die Menge der Nullstellen von  $F$  diskret ist, können wir  $X$  unterteilen in offene Intervalle, in denen  $F$  positiv oder negativ ist, und deren Randpunkte, nämlich die Nullstellen.

Es sei zunächst  $x_0 \in X$  eine Nullstelle von  $F$ . Dann ist die konstante Funktion  $f : t \rightarrow x_0$  eine Lösung der Differentialgleichung. Mit den Begriffen, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden, wird der Punkt  $x_0$  als "Gleichgewichtspunkt" oder "Equilibrium" bezeichnet.

**Beispiel 4.1.** Es sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die "logistische Funktion"  $x \mapsto x(1 - x)$ . Die entsprechende Differentialgleichung für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\forall t : f'(t) = f(t)(1 - f(t))$$

wird verwendet zur Beschreibung einer Population. Solange die Bevölkerung  $f(t)$  im Verhältnis zu 1 klein ist, ist die Änderungsrate proportional zu  $x$ . Wenn  $f(t)$  aber in die Nähe des Schwellwerts 1 kommt, wird das Wachstum kleiner und kann für  $f(t) > 1$  auch negativ werden.

Die Differentialgleichung besitzt genau zwei Equilibrien, bei denen die Bevölkerung konstant bleibt, nämlich  $f_1(t) = 0$  und  $f_2(t) = 1$ .

Ein wenig schwieriger, aber immer noch leicht zu verstehen, ist die Situation im folgenden Satz:

**Satz 4.2.** *Es sei  $x_0 \in X$  eine Nullstelle von  $F$ . Es sei  $(a, x_0)$  ein Intervall, in dem  $F$  positiv ist ( $a = -\infty$  ist erlaubt). Es sei  $(x_0, b)$  ein Intervall, in dem  $F$  negativ ist. Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung, sodaß  $f(0) \in (a, b)$  ist. Dann gilt  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = x_0$  (insbesondere existiert der Grenzwert).*

*Proof.* Wir definieren die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto (f(t) - x_0)^2$ . Weil  $f$  differenzierbar ist – schliesslich ist  $f$  ja eine Lösung der Differentialgleichung, ist auch  $g$  differenzierbar. Außerdem gilt für alle  $t$

$$g'(t) = 2f'(t)(f(t) - x_0) = 2F(f(t))(f(t) - x_0),$$

und dieser Wert ist in einer Umgebung von  $t = 0$  negativ: wenn nämlich  $(f(t) - x_0)$  positiv ist, ist  $F(f(t))$  negativ, und wenn  $(f(t) - x_0)$  negativ ist, ist  $F(f(t))$  positiv. Daher ist die Funktion bei 0 monoton fallend, das heißt der Abstand des Funktionswertes zum Equilibrium wird kleiner. Es kann dann auch nicht passieren, daß der Wert von  $f$  aus dem Intervall herauskommt,

und die Funktion  $g$  ist auf ganz  $\mathbb{R}_+$  monoton fallend. Dann ist auch  $f$  monoton steigend oder fallend, je nachdem ob  $f(0)$  größer oder kleiner als  $x_0$  ist. Daraus folgt auch, daß der Grenzwert  $x_1 := \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  existiert. Wir müssen noch zeigen, daß  $x_1 = x_0$  ist.

Da  $f$  bei  $x_1$  eine waagrechte Asymptote hat, gilt

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(f(t)) = F(\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)) = F(x_1).$$

Die einzige Nullstelle von  $F$ , die noch näher bei  $x_0$  liegt als  $f(0)$ , ist aber  $x_0$  selbst. □

Im obigen Beispiel sind die Voraussetzungen für das Equilibrium  $x_0 = 1$  erfüllt, daher konvergiert der Funktionswert für alle Startwerte in  $(0, \infty)$  gegen 1.

## 5 Stabile und Asymptotisch Stabile Equilibrien

Im Satz (4.2) wird eine Situation beschrieben, die man gerne verallgemeinern möchte: “stabile Equilibrien” sollten Umgebungen besitzen, sodaß Lösungen mit Startwert in der Umgebung nicht mehr aus dieser Umgebung ausbrechen und schlussendlich gegen das Equilibrien konvergieren. Leider läßt sich so eine Umgebung, aus der es kein Entkommen mehr gibt, nicht immer (und wenn, dann auch nur schwer) nachweisen. Es erweist sich, daß man sich das Leben langfristig leichter macht, wenn man eine zusätzliche “Analysis-Klausel” in die Definition einbaut.

Es sei  $n > 0$ . Es sei  $X$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in X$  ein Punkt. Es sei  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Richtungsfeld, welches ein kontinuierliches dynamisches System durch die Differentialgleichung  $\forall t : f'(t) = F(f(t))$  für  $f : \mathbb{R} \rightarrow X$  beschreibt.

**Definition 5.1.** Wenn  $F(x_0) = 0$  ist, dann nennen wir  $x_0$  ein Equilibrium für das dynamische System beschrieben durch  $F$ .

Wie schon erwähnt, ist für jedes Equilibrium  $x_0$  die konstante Funktion  $f(t) = x_0$  eine Lösung der Differentialgleichung mit Anfangswert  $x_0$ .

**Definition 5.2.** Es sei  $x_0$  ein Equilibrium. Wir nennen es ein stabiles Equilibrium, wenn für jede Umgebung  $U$  von  $x_0$  eine Umgebung  $V$  von  $x_0$  existiert, sodaß für jede Lösung  $f$  der Differentialgleichung mit Startwert  $f(0) \in V$  ein  $t_1 > 0$  existiert, sodaß  $f(t) \in U$  gilt für alle  $t > t_1$ .

Ein Beispiel, bei dem die Analysis-Klausel schlagend wird, ist das dynamische System auf  $X = \mathbb{R}^1$  gegeben durch die Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(t) = t \sin(1/t)$  (für  $t \neq 0$  definiert, in den Wert  $t = 0$  stetig durch  $F(0) = 0$  fortgesetzt). Die Equilibrien sind 0 und die Zahlen  $\frac{1}{k\pi}$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Für ungerade  $k$  ist die Voraussetzung von Satz (4.2) erfüllt, und diese Gleichgewichtspunkte sind daher auch stabil. Für gerade  $k$  haben wir eine zeitliche Umkehrung der Stabilität: die Lösungen in der Nähe driften vom Gleichgewichtspunkt weg. Diese sind also nicht stabil. Der interessanteste Gleichgewichtspunkte ist der Nullpunkt. In jeder Umgebung dieses Gleichgewichtspunkts befinden sich sowohl stabile als auch instabile Equilibrien vom vorigen Typ. Jede nichtkonstante Lösung wird von einem stabilen Equilibrium eingefangen, und zwar von einem der nicht weit weg vom Startwert ist (zumindest durch kein anderes Equilibrium getrennt). Für jede Umgebung  $U$  von 0 können wir daher eine Umgebung von  $V$  angeben, sodass  $U$  sowohl  $V$  als auch alle Equilibrien enthält, die mit die Lösungen mit Startwert in  $V$  einfangen. Mit anderen Worten: 0 ist ein stabiles Equilibrium.

Der Begriff Stabilität drückt zwar das “Nicht-Ausbrechen” aus, aber nicht die Limes-Eigenschaft. Wir definieren daher zusätzlich:

**Definition 5.3.** Es sei  $x_0$  ein stabiles Equilibrium. Wir nennen es asymptotisch stabil, wenn eine Umgebung  $W$  von  $x_0$  existiert, sodaß jede Lösung mit Startwert in  $W$  gegen  $x_0$  konvergiert.

Wenn die Voraussetzungen von Satz (4.2) erfüllt sind, dann haben wir ein asymptotisch stabiles Equilibrium, wie man sich leicht überlegen kann. Im Beispiel vorhin ist das stabile Equilibrium bei 0 nicht asymptotisch stabil: die Grenzwerte existieren zwar immer, aber sind in der Regel



Figure 1: Phasenporträt der logistischen Differentialgleichung  $f'(t) = f(t)(1-f(t))$ . Der Bildraum wird besteht aus 5 Bahnen. Zwei davon sind Punkte, der Punkt 1 ist asymptotisch stabil.

andere Equilibrien (solche mit ungeraden  $k$ ). Wir haben aber noch ein viel einfacheres Beispiel eines stabilen, aber nicht asymptotisch stabilen Equilibriums, nämlich für das Richtungsfeld  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto 0$ . Jeder Punkt ist ein Equilibrium, alle Equilibrien sind stabil, keines davon ist asymptotisch stabil.

In der Mathematik versuchen wir bei den Definitionen, so wenig wir möglich zu verlangen. Bei der Definition der asymptotischen Stabilität könnte man meinen, daß die Voraussetzung der Stabilität vielleicht überflüssig ist: es könnte sein, dass aus der Aussage

es existiert eine Umgebung  $W$  von  $x_0$ , sodaß jede Lösung mit Startwert in  $W$  gegen  $x_0$  konvergiert

schon die Stabilität von  $x_0$  folgt. Im Fall  $X \subset \mathbb{R}^1$  kann man zeigen, dass das tatsächlich der Fall ist: wenn die obige Aussage erfüllt ist, dann können sich die Nullstellen von  $F$  nicht bei  $x_0$  häufen, sonst hätte jede mögliche Umgenung  $W$  ein weiteres Equilibrium und damit eine Lösung, die nicht gegen  $x_0$  konvergiert. Die Voraussetzung von Satz (4.2) ist daher erfüllt, und damit haben wir Stabilität. Wir werden aber später zwei-dimensionale dynamische Systeme sehen, die ein Equilibrium haben, welches die obige Aussage erfüllt, die aber nicht stabil sind (und daher auch nicht asymptotisch stabil).

Das Phasenportrait ist eine graphische Darstellung eines dynamischen Systems, in dem die einzelnen Lösungen als Kurven in  $X$  dargestellt werden, und die Durchlaufrichtung der Kurve mit einem Pfeil bezeichnet wird. Die Kurven bzw. Punkte (im Fall von Equilibrien) nennen wir auch *Bahnen*. Voraussetzung für das Erstellen des Phasenportraits sind die Eindeutigkeit (Bahnen sind disjunkt) und zumindest lokale Existenz (jeder Punkt hat eine Bahn) von Lösungen. Wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, bilden die Bahnen eine Partition von  $X$ .

Im Fall  $X \subset \mathbb{R}^1$  kann man das Phasenportrait zeichnen der Differentialgleichung für  $f : T \rightarrow X$ ,  $\forall t : f'(t) = F(f(t))$  zeichnen, wenn man die Nullstellen von  $F$  kennt und das Vorzeichen des Wertes von  $F$  in den Intervallen zwischen den Nullstellen. Die Nullstellen entsprechen konstanten Lösungen und werden als Punkte dargestellt. Die Intervalle sind ebenfalls Bilder von Lösungskurven. Die Richtung ist aufwärts in Intervallen, in denen  $F$  positiv ist, und abwärts in Intervallen, in denen  $F$  negativ ist.

## 6 Bifurkationen

Angenommen, wir haben ein dynamisches System, das stetig von einem (oder mehreren) Parameter abhängt. Welchen Einfluss haben kleine Änderungen der Parameter auf Stabilitäts-Eigenschaften der Equilibrien? Diese Fragestellung wird im Lauf der Vorlesung noch ausführlich behandelt; an dieser Stelle nur eine Vorschau auf den Begriff der Bifurkation mit einigen Beispielen.

In den folgenden Beispielen gehen wir von einer stetigen Funktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x)$  aus. Für ein fixes  $\lambda \in \mathbb{R}$  sei  $F_\lambda$  die Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto F(\lambda, x)$ . Diese definiert die parameter-abhängige Differentialgleichung für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : f'(t) = F_\lambda(f(t)).$$

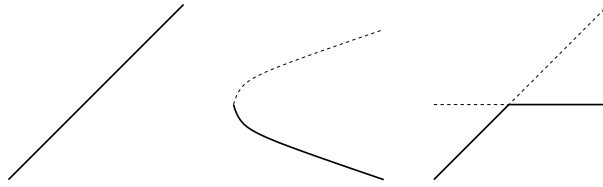


Figure 2: Bifurkationsdiagramme für die parameterabhängigen Differentialgleichungen  $f'(t) = -f(t) + \lambda$ ,  $f'(t) = f(t)^2 - \lambda$ ,  $f'(t) = f(t)(f(t) - \lambda)$ . Stabile Equilibrien sind fett durchgezeichnet, die anderen strichliert.

**Beispiel 6.1.** Wir beginnen mit  $F_\lambda(x) = -x + \lambda$ . Dieses System hat für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  genau ein Equilibrium, und zwar bei  $\lambda$ . Die Voraussetzungen von Satz 4.2 sind erfüllt, also ist das Gleichgewicht asymptotisch stabil. Das Equilibrium ändert zwar die Position, aber der Typ bleibt unverändert, wenn man den Parameter ändert. Dieses Phänomen werden wir später als *strukturell stabil* bezeichnen.

**Beispiel 6.2.** (Sattelknoten) Das nächste Beispiel ist  $F_\lambda(x) = x^2 - \lambda$ . Für  $\lambda < 0$  gibt es keine Equilibrien. Für  $\lambda > 0$  existieren zwei Equilibrien bei  $\pm\sqrt{\lambda}$ . Das Equilibrium bei  $-\sqrt{\lambda}$  ist asymptotisch stabil, das andere nicht. Im Grenzfall  $\lambda = 0$  haben wir ein Equilibrium, welches "halbseitig stabil" ist: Bahnen von unten konvergieren, Bahnen von oben nicht.

**Beispiel 6.3.** (transkritisch) Nun sei  $F_\lambda(x) = x(x - \lambda)$ . Hier gibt es für fast alle  $\lambda$  zwei Equilibrien bei 0 und bei  $\lambda$ , außer bei  $\lambda = 0$ , wo beide zusammenfallen. Beim Übergang von negativen zu positiven Parametern wechseln die Equilibrien den Typ: für negative  $\lambda$  ist das Equilibrium bei  $\lambda$  stabil und das bei 0 nicht. Für positive  $\lambda$  ist es umgekehrt.

Im Bifurkationsdiagramm verwenden wir  $\lambda$  und  $x$  als Koordinaten. Die Nullstelle von  $F$  in der  $(\lambda, x)$ -Ebene ist im allgemeinen eine Kurve. Wir zeichnen die Teile der Kurve, die stabilen Equilibrien entsprechen, mit dicker Strichstärke, und die anderen Teile strichliert. Die Regel ist: wenn unterhalb eines Kurvenzweiges die Funktion  $F$  positiv ist und oberhalb negativ, dann wird dieser Teil dick gezeichnet, sonst strichliert.

## 7 Lösungsverfahren

Es gibt Anekdoten von Mathematikern, die mit einem rechnerischen Problem konfrontiert werden, eine Nacht lang nachdenken und danach stolz verkünden: "ich habe gezeigt, dass eine Lösung existiert". Meistens bleibt der Applaus aus; man erwartet sich oft mehr. Doch was heißt das eigentlich genau, eine Gleichung lösen?

Ein eklatanter Fall ist die allgemeine Gleichung vierten Grades für  $x \in \mathbb{C}$ :

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

wobei  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$  gegeben sind. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra existieren 4 Lösungen, die auch zusammenfallen können. Die Formel von Ferrara ist ein Ausdruck für die Lösung, der neben den arithmetischen Operationen  $(+, -, \cdot, :)$  auch Wurzeln enthält. Die Wurzel ist im komplexen eine mehrdeutige Operation, und bei der richtigen Wahl der Auswertung bekommt man die 4 Lösungen.

Es besteht also kein Zweifel, dass die Formel von Ferrara die obige Gleichung vollständig löst. Auf der anderen Seite wird die Formel kaum verwendet zum numerischen Berechnen der Lösung, und zwar aus zwei Gründen. erstens ist die Formel kompliziert und die Wurzeln sind im komplexen nicht leicht auszuwerten (zu Ferrara's Zeiten verwendete man dazu Winkelfunktionen). Zweitens steht ein einfaches numerisches Näherungsverfahren zur Verfügung, das schnell konvergiert,

nämlich das Newton-Verfahren. Ist dann nicht die Newton-Methode gemeinsam mit dem Fundamentalsatz der Algebra, der die Existenz und Anzahl der Lösungen garantiert, nicht eine bessere “Lösung” als Ferrara’s Formel?

Im Fall von dynamischen Systemen ist nicht eine Zahl, sondern eine Funktion gesucht, das macht die Frage, was “Lösung” bedeutet, auch nicht gerade einfacher. Wenn wir uns die Option einer numerischen Lösung offenhalten wollen, liegt folgende Definition nahe: *eine Differentialgleichung für  $f$  ist gelöst, wenn wir zu einem gegebenen Anfangswert  $f(0)$  und zu einer gegebenen Stelle  $\tau$  die Zahl  $f(\tau)$  berechnen können, sei es mit einer Formel oder mit einem numerischen Näherungsverfahren.*

Wenden wir die gleiche Definition auch für die Rekursion für  $f : \mathbb{N} \rightarrow X : f(t+1) = F(f(t))$  an, dann ist die Rekursion selbst auch schon eine Lösung, weil sie als rekursiver Algorithmus gelesen werden kann.

Für Differentialgleichungen ist die Sache nicht so einfach. Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ; und wir wollen die Differentialgleichung

$$\forall t : f'(t) = F(f(t))$$

für  $f : \mathbb{R} \rightarrow X$  lösen. Sei  $\tau > 0$ . Im Eulersche Polygonzugverfahren wählen wir zunächst  $N \in \mathbb{N}$  – je größer  $N$ , desto höher ist der Rechenaufwand, aber wir erwarten auch eine höhere Genauigkeit – und unterteilen das Intervall  $[0, \tau]$  in  $N$  Teilintervalle der Länge  $h := \frac{\tau}{N}$ . Dann definieren wir eine Rekursion für  $g_N : \mathbb{N} \rightarrow X$

$$\forall t : g_N(t+1) = g_N(t) + hF(g_N(t))$$

hoffend dass die rechte Seite in  $X$  liegt. Wenn nicht, bricht das Verfahren mit einer Fehlermeldung ab (das kann nicht passieren wenn  $X = \mathbb{R}^n$  ist). Als Startwert setzen wir  $g_N(0) = f(0)$ , den gegebenen Startwert von  $f$ . Und der Näherungswert von  $f(\tau)$  ist  $g_N(N)$  – allgemeiner, für alle  $i \geq 0$  ist  $g_N(i)$  ein Näherungswert für  $f(hi)$ .

Zwei schwerwiegende Einwände muss man an dieser Stelle machen. Erstens ist noch gar nicht ausgemacht, dass überhaupt ein Lösung  $f$  mit dem abgegebenen Startwert existiert. Und zweitens, selbst wenn die Lösung existiert und eindeutig ist, dann ist auch nicht klar, ob  $\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(N)$  existiert und gleich  $f(\tau)$  ist. Beide Fragen werden an späterer Stelle noch behandelt werden.

## 8 Symbolische Lösungen

Das Beispiel der Gleichung vierten Grades war nicht typisch: mitunter sind Lösungsformeln einfacher und schneller auswertbar als numerische Verfahren (wenn man weiss wie man sie findet). Das Entwickeln von Algorithmen zum Berechnen von Lösungsformeln ist Aufgabe der mathematischen Disziplin “Symbolisches Rechnen”. Es ist natürlich nicht so, dass immer eine Lösungsformel existiert. Ob das so ist, hängt von der Sprache ab, die man vorher definieren muss und die genau festlegt was eine Formel ist.

Ein berühmtes Beispiel aus der Algebra ist die allgemeine Gleichung fünften Grades für  $x \in \mathbb{C}$ :

$$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

wobei  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$  gegeben sind. Abel/Ruffini/Galois haben gezeigt, dass es keine Lösungsformel gibt, die aus den arithmetischen Operationen und Wurzeloperationen besteht.

Ein oft verwendeter Begriff einer Formel ist die Menge der elementaren Funktionen: eine Funktion einer Teilmenge von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  heißt elementar, wenn sie sich ausdrücken lässt durch arithmetische Operationen, Exponentialfunktionen und Logarithmen (Wurzelfunktionen braucht man nicht, weil die sich mit Exponentialfunktionen und Logarithmen ausdrücken lassen). Diese Klasse von Funktionen ist relativ eingeschränkt, und viele Gleichungen sind mit diesem Formelbegriff unlösbar, etwas das Invertieren von Funktionen, das auf eine algebraische Gleichung führt. Auch Integrationsprobleme und damit Differentialgleichungen sind manchmal unlösbar, etwa die Gleichung für  $f$

$$\forall t : f'(t) = e^{t^2}. \tag{7}$$



Die elementare Funktion  $t \mapsto e^{t^2}$  hat keine elementare Stammfunktion.

Ein Satz von Liouville gibt Aufschluss darüber, wie Stammfunktion einer elementaren Funktion ausschaun muss, falls überhaupt eine existiert. Die untenstehende Formulierung ist etwas salopp; die genaue Formulierung ist technisch aufwändig, und wir sparen sie ein, weil wir sowieso in dieser Vorlesung nicht mit diesem Satz arbeiten werden.

**Satz 8.1.** *Es sei  $f$  eine elementare Funktion und  $F$  eine elementare Stammfunktion. Dann treten als Argumente von Exponentialfunktionen in  $F$  nur solche Ausdrücke auf, die auch schon als Argumente von Exponentialfunktionen in  $f$  auftreten; und als Argumente von Logarithmen in  $F$  treten entweder Ausdrücke auf, die auch schon als Argumente von  $f$  in Logarithmen auftreten, oder in  $f$  im Nenner eines Bruches stehen; im zweiten Fall ist  $F$  eine lineare Funktion von diesem Logarithmus.*

Der Beweis des Satzes von Liouville (den wir hier nicht angeben) ist konstruktiv. Er liefert einen Algorithmus, der entscheidet, ob eine gegebene elementare Funktion eine Stammfunktion hat, und berechnet diese im Fall dass sie existiert.

Ein wichtiger Spezialfall ist die Unterklasse der rationalen Funktionen, also Funktionen, die sich nur durch arithmetische Operationen darstellen lassen. Diese haben immer elementare Stammfunktionen, und nach dem Satz von Liouville treten keine Exponentialfunktionen, nur Logarithmen von Faktoren des Nenners. Mit Hilfe der Methode der Partiabruchzerlegung kann eine elementare Stammfunktion berechnet werden (siehe Skriptum für Analysis).

Würde man die Sprache erweitern und zusätzlich zu arithmetischen Operationen, Exponentialfunktion und Logarithmus auch noch unbestimmte Integrale zulassen und Funktionen, die sich in dieser Sprache schreiben lassen, etwa "intelementare Funktionen" nennen, dann hat man natürlich überhaupt kein Problem, die Gleichung (7) zu lösen:  $f(x) = \int e^{x^2} dx$ . Allgemein hat jede intelementare Funktion  $g$  eine intelementare Stammfunktion, nämlich  $\int g(x) dx$ .