

1 Verschiedene Typen von Dynamischen Systemen

Ein dynamisches System ist ein mathematisches Modell eines Prozesses durch Funktionen von einer Menge T (Zeit) in einen Raum X . Die Menge T ist entweder gleich \mathbb{R} bzw. ein Intervall von \mathbb{R} (kontinuierliches dynamisches System) oder gleich \mathbb{N} (diskretes dynamisches System). Der Raum X ist meistens ein reeller endlich-dimensionaler Vektorraum – bei linearen dynamischen Systemen ist das unabdingbar – oder eine Teilmenge eines Vektorraumes. Das Wesentliche ist, dass die Funktion (manchmal auch eine Menge von Funktionen) nicht durch einen expliziten Ausdruck beschrieben wird, sondern im diskreten Fall durch eine Rekursion und im kontinuierlichen Fall durch eine Differentialgleichung.

Wir beginnen mit dem diskreten Fall: $T = \mathbb{N}$, und $X \subset \mathbb{R}$ oder $X \subset \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : T \rightarrow X$ wird beschrieben durch die Rekursionsgleichung der Ordnung $k > 0$, die wie folgt aussieht:

$$\forall t \in T : f(t+k) = F(f(t), f(t+1), \dots, f(t+k-1), t),$$

wobei $F : (X^k \times T) \rightarrow X$ eine gegebene stetige Funktion ist. Sobald die Anfangswerte $f(0), f(1), \dots, f(k-1)$ bekannt sind, ist die Funktion f eindeutig festgelegt und kann mit einem Programm rekursiv an jeder natürlichen Zahl ausgewertet werden.

Sehr oft ist man in der Situation, daß der Wert $F(x_0, \dots, x_{k-1}, t)$ nicht von t abhängt, also dass man eigentlich eine Funktion $F : X^k \rightarrow X$ hat. Wir sprechen in diesem Fall von einer autonomen (zeitunabhängigen) Rekursion. Der nicht-autonome Fall entspricht eigentlich nicht der "Philosophie" der dynamischen Systeme: wenn wir zeitabhängige Rekursionen erlauben, können wir ja auch gleich einen Ausdruck für die Funktion in die Rekursion stecken:

$$F(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, t) := A(t),$$

und hätten dann eine explizite Darstellung $f(t) = A(t)$. Genau das, was wir in der Theorie der dynamischen Systeme ja ausschließen wollten. Drum ist der autonome Fall der normale Fall.

Wenn uns jetzt eine nicht-autonome Rekursion über den Weg läuft und wir trotzdem philosophisch auf der Linie der dynamischen Systeme bleiben wollen, dann ist das möglich: der nicht-autonome Fall läßt sich immer auf den autonomen Fall zurückführen. Außerdem können Rekursionen beliebiger Ordnung immer auf Rekursionen erster Ordnung zurückgeführt werden. Beide Rückführungen sind nicht gratis, sie gehen auf Kosten höherer Dimension n des Wertebereichs von f .

Wir beschreiben zuerst die Rückführung einer nicht-autonomen Rekursion erster Ordnung für eine Funktion $f : T \rightarrow X$, gegeben durch die Funktion $F : (X \times T) \rightarrow X$; als Rekursion für f liest sich das so:

$$\forall t \in T : f(t+1) = F(f(t), t). \tag{1}$$

Wir definieren nun $Y := X \times T$ und die Funktion

$$G : Y \rightarrow Y, (x, t) \mapsto (F(x, t), t+1),$$

die eine Rekursion für $g : T \rightarrow Y$ definiert:

$$\forall t \in T : g(t+1) = G(g(t)). \tag{2}$$

Wenn nun $f : T \rightarrow X$ die Rekursion 1 erfüllt, dann erfüllt die Funktion $(x, t) \mapsto (f(t), t)$ die Rekursion 2. Umgekehrt: wenn $g : T \rightarrow Y$ die Rekursion (2) erfüllt und einen Startwert $g(0)$ mit t -Komponente gleich 0 hat, dessen t -Komponente gleich 0 ist, dann ist die erste Komponente von g eine Lösung von Rekursion (1) und die zweite Komponente ist die Identität $t \mapsto t$. Bei Rekursionen höherer Ordnung funktioniert eine ähnliche Rückführung (wobei es beim Ausdenken einer Rekursion für die Zeitkomponente ein bisschen Platz für Kreativität gibt).

Nun beschreiben wir die Rückführung einer autonomen Rekursion von Ordnung $k > 1$ für eine Funktion $f : T \rightarrow X$, gegeben durch eine Funktion $F : X^k \rightarrow X$ und als Rekursion geschrieben

$$\forall t \in T : f(t+k) = F(f(t), f(t+1), \dots, f(t+k-1)), \tag{3}$$

auf eine Rekursion erster Ordnung. Wir definieren $Y := X^k$ und die Funktion

$$G : Y \rightarrow Y, (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, F(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})).$$

Diese definiert wieder eine Rekursion für $g : T \rightarrow Y$; die Rekursionsgleichung ist die gleiche wie in (2). Wenn $f : T \rightarrow X$ nun die Rekursion 3 erfüllt, dann erfüllt die Funktion $t \mapsto (f(t), f(t+1), \dots, f(t+k-1))$ die Rekursion (2). Wenn umgekehrt g die Rekursionsgleichung (2) erfüllt, dann erfüllt jeder ihrer k Komponenten die Rekursion (3).

1.1 Lineare Rekursionen

Es sei nun X ein reeller Vektorraum. Eine nicht-autonome Rekursion gegeben durch eine Funktion $F : (X^k \times T) \rightarrow X$ heißt linear, wenn für jedes $t \in T$ die Funktion $(x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto F(x_0, \dots, x_{k-1}, t)$ linear ist. Die Lösungen bilden einen Vektorraum der Dimension $k \dim X$; die Abbildung, die jedem k -Tupel von Anfangswerten $(x_0, \dots, x_{k-1}) \in X^k$ die eindeutig bestimmte Lösung der Rekursion mit diesen Anfangswerten zuordnet, ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Die oben beschriebene Rückführung auf eine Rekursion erster Ordnung liefert in der Tat eine lineare Rekursion erster Ordnung. Beschränken wir uns daher (vorläufig) auf lineare Rekursionen erster Ordnung. Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann kann man die Funktion F auch schreiben als matrixwertige Funktion $A : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, also $F(x_0, \dots, x_{k-1}, t) := A(t) \cdot (x_0, \dots, x_{k-1})$. Der Vektorraum-Isomorphismus zwischen Anfangswerten und Lösungen läßt sich ebenfalls als matrixwertige Funktion $B : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ schreiben. Die Lösung $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Rekursion

$$\forall t \in T : f(t+1) = A(t)f(t)$$

läßt sich dann schreiben als

$$g(t) = B(t)(g(0), \dots, g(k-1)).$$

Die Matrix B erfüllt die Gleichungen

$$\forall t : B(t+1) = A(t)B(t), \quad B(0) = I_n.$$

Die Matrix $B(t)$ kann berechnet werden durch Aufmultiplizieren der Matrizen $A(0), \dots, A(t-1)$ von rechts nach links.

Im autonomen Fall ist das alles viel einfacher: statt einer matrixwertigen Funktion haben wir eine einzige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und $B(t) = A^t$. Diesen Fall werden wir später noch genauer studieren.

Bemerkung 1.1. Wie erwähnt, lassen sich nicht-autonome Rekursionen immer auf autonome Rekursionen zurückführen. Leider wird bei dieser Reduktion die Linearität nicht beibehalten, drum ist die Theorie der nicht-autonomen linearen Rekursionen (bzw. im kontinuierlichen Fall die Theorie der nicht-autonomen linearen Differentialgleichungen) komplizierter als die Theorie der autonomen linearen Rekursionen (bzw. der autonomen linearen Differentialgleichungen).

Wenn nichts dazugesagt wird, verstehen wir unter einer "linearen Rekursion" eine homogene lineare Gleichung. Die inhomogene lineare Rekursion für $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ sieht so aus:

$$\forall t \in T : f(t+1) = A(t)f(t) + b(t),$$

wobei $A : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine gegebene matrixwertige Funktion und $b : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine gegebene vektorwertige Funktion ist. Es ist nicht schwierig, eine solche inhomogene Rekursion zurückzuführen auf eine homogene lineare Rekursion für $g : T \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$; die ersten n Komponenten dieser neuen Rekursion bilden f , und die letzte ist konstant 1.

2 Kontinuierliche Dynamische Systeme

Hier ist $T = \mathbb{R}$ oder eine zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R} (also ein Intervall); X ist wieder ein endlich-dimensionaler reellen Vektorraum oder eine Teilmenge eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraums. Eine Funktion $f : T \rightarrow X$ wird in diesem Fall beschrieben durch eine Differentialgleichung der Ordnung $k > 0$:

$$\forall t \in T : f^{(k)}(t) = F(f(t), f'(t), \dots, f^{(k-1)}(t), t), \quad (4)$$

wobei $F : (X^k \times T) \rightarrow X$ eine gegebene stetige Funktion ist. Im Unterschied zum diskreten Fall ist überhaupt nicht klar, ob die Funktion durch Anfangswerte eindeutig festgelegt ist. Der fundamentale Satz von Picard/Lindelöf, den wir beweisen und ausführlich werden, besagt, daß unter gewissen Voraussetzungen für F die Lösung f der Differentialgleichung eindeutig durch die Anfangswerte $f(0), f'(0), \dots, f^{(k-1)}(0)$ festgelegt ist, und auch daß für gegebene Anfangswerte immer eine Lösung existiert.

In anderer Hinsicht ist die Theorie der kontinuierlichen Systeme dafür wieder einfacher als die diskrete Theorie. Zum Beispiel kann man im kontinuierlichen Fall sehr einfach “die Zeit umdrehen” und ein lineares System aufstellen, das in die Vergangenheit schaut. Man braucht dazu nur in der Differentialgleichung t durch $-t$ ersetzen. Im diskreten Fall kann man die Rekursionen nicht nach rückwärts verfolgen, weil zum Beispiel die Funktion $F : X \rightarrow X$ in der Rekursion $\forall t : f(t+1) = F(f(t))$ im allgemeinen nicht invertierbar ist.

Die oben besprochenen Rückführungen für den diskreten Fall lassen sich auch auf den kontinuierlichen Fall übertragen. So kann man eine nicht-autonome Differentialgleichung für $f : T \rightarrow X$

$$\forall t \in T : f'(t) = F(f(t), t)$$

zurückführen auf eine autonome Gleichung für $g : T \rightarrow X \times T$. Und man kann eine Differentialgleichung der Ordnung k für $f : T \rightarrow X$

$$\forall t \in T : f^{(k)}(t) = F(f(t), f'(t), \dots, f^{(k-1)}(t)), \quad (5)$$

auf eine Differentialgleichung erster Ordnung für $g : T \rightarrow X^k$ zurückführen. Im letzteren Fall bleibt Linearität erhalten, im ersteren nicht.

3 Zusammenhang zwischen diskreten und kontinuierlichen Systemen

Es gibt mehrere Querverbindungen zwischen dem diskreten und dem kontinuierlichen Fall.

- Falls in einer autonomen Differentialgleichung Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems für $f : \mathbb{R} \rightarrow X$

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = F(f(t))$$

erfüllt ist, haben wir für jede Schrittweite $h > 0$ eine Funktion $G : X \rightarrow X$, sodass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(t+h) = G(f(t))$ gilt. Die Funktion G berechnet also den Wert nach Zeiteinheit h und stellt eine Diskretisierung der Differentialgleichung dar. Die Lösungen der Rekursion für $g : \mathbb{N} \rightarrow X$, $\forall t \in \mathbb{N} : g(t+1) = G(g(t))$ sind Folgen $(f(t_0), f(t_0+h), f(t_0+2h), \dots)$ von Funktionswerten der Lösung der Differentialgleichung.

- Für kleine numerische Werte von h kann ein G wie oben approximativ berechnet werden. Auf diese Weise erhält man numerische Verfahren zum Auswerten von Lösungen von Anfangswertproblemen.
- Wenn die Lösungen einer Differentialgleichung bei 0 analytisch sind – das heißt, dass alle Ableitungen bei 0 existieren und die Taylorreihe in einem geeigneten Konvergenzbereich gegen die Funktion konvergiert –, dann bilden die Ableitungen bei 0 eine Folge. Diese Folge erfüllt eine Rekursion, die sich oft direkt aus der Differentialrechnung berechnen läßt.

- Umgekehrt kann man aus einer Folge, die eine Rekursion löst, eine Potenzreihe bilden und hoffen, daß die Potenzreihe konvergiert. Wenn ja, dann erfüllt sie oft eine Differentialgleichung, die sich direkt aus der Rekursion ableiten läßt.
- Bei der qualitativen Beschreibung von Lösungen von Differentialgleichung für $t \rightarrow \infty$ gibt es eine wichtige Methode, die wir noch diskutieren werden: man bildet eine Durchschnittsmenge $H \subset X$ und untersucht die Folge der Schrittpunkte einer Lösung in der zeitlichen Reihenfolge. Diese Folge erfüllt ebenfalls eine Rekursion, und qualitative Eigenschaften dieser Rekursion hängen eng zusammen mit qualitativen Eigenschaften der zu untersuchenden Differentialgleichung.

4 Skalare autonome Differentialgleichungen

Hier ist $T = \mathbb{R}$. Gegeben ist eine stetige Funktion $F : T \rightarrow X$, und gesucht ist $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, sodaß

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = F(f(t)) \quad (6)$$

gilt. Bevor wir uns konkreten Lösungsverfahren zuwenden, wollen wir versuchen, qualitativ etwas über die Lösung auszusagen ohne die Lösung tatsächlich zu berechnen. Numerische und exakte Methoden zur Lösung werden später noch besprochen.

Das asymptotische Verhalten der Lösung wird durch das Vorzeichen von F bestimmt: wenn für ein $t_0 \in T$ der Wert $F(f(t_0))$ positiv bzw. negativ ist, dann ist die Funktion bei t_0 streng monoton steigend bzw. fallend. Wenn die Menge der Nullstellen von F diskret ist, können wir X unterteilen in offene Intervalle, in denen F positiv oder negativ ist, und deren Randpunkte, nämlich die Nullstellen.

Es sei zunächst $x_0 \in X$ eine Nullstelle von F . Dann ist die konstante Funktion $f : t \rightarrow x_0$ eine Lösung der Differentialgleichung. Mit den Begriffen, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden, wird der Punkt x_0 als "Gleichgewichtspunkt" oder "Equilibrium" bezeichnet.

Beispiel 4.1. Es sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die "logistische Funktion" $x \mapsto x(1 - x)$. Die entsprechende Differentialgleichung für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\forall t : f'(t) = f(t)(1 - f(t))$$

wird verwendet zur Beschreibung einer Population. Solange die Bevölkerung $f(t)$ im Verhältnis zu 1 klein ist, ist die Änderungsrate proportional zu x . Wenn $f(t)$ aber in die Nähe des Schwellwerts 1 kommt, wird das Wachstum kleiner und kann für $f(t) > 1$ auch negativ werden.

Die Differentialgleichung besitzt genau zwei Equilibrien, bei denen die Bevölkerung konstant bleibt, nämlich $f_1(t) = 0$ und $f_2(t) = 1$.

Ein wenig schwieriger, aber immer noch leicht zu verstehen, ist die Situation im folgenden Satz:

Satz 4.2. *Es sei $x_0 \in X$ eine Nullstelle von F . Es sei (a, x_0) ein Intervall, in dem F positiv ist ($a = -\infty$ ist erlaubt). Es sei (x_0, b) ein Intervall, in dem F negativ ist. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung, sodaß $f(0) \in (a, b)$ ist. Dann gilt $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = x_0$ (insbesondere existiert der Grenzwert).*

Proof. Wir definieren die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto (f(t) - x_0)^2$. Weil f differenzierbar ist – schliesslich ist f ja eine Lösung der Differentialgleichung, ist auch g differenzierbar. Außerdem gilt für alle t

$$g'(t) = 2f'(t)(f(t) - x_0) = 2F(f(t))(f(t) - x_0),$$

und dieser Wert ist in einer Umgebung von $t = 0$ negativ: wenn nämlich $(f(t) - x_0)$ positiv ist, ist $F(f(t))$ negativ, und wenn $(f(t) - x_0)$ negativ ist, ist $F(f(t))$ positiv. Daher ist die Funktion bei 0 monoton fallend, das heißt der Abstand des Funktionswertes zum Equilibrium wird kleiner. Es kann dann auch nicht passieren, daß der Wert von f aus dem Intervall herauskommt,

und die Funktion g ist auf ganz \mathbb{R}_+ monoton fallend. Dann ist auch f monoton steigend oder fallend, je nachdem ob $f(0)$ größer oder kleiner als x_0 ist. Daraus folgt auch, daß der Grenzwert $x_1 := \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existiert. Wir müssen noch zeigen, daß $x_1 = x_0$ ist.

Da f bei x_1 eine waagrechte Asymptote hat, gilt

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(f(t)) = F(\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)) = F(x_1).$$

Die einzige Nullstelle von F , die noch näher bei x_0 liegt als $f(0)$, ist aber x_0 selbst. □

Im obigen Beispiel sind die Voraussetzungen für das Equilibrium $x_0 = 1$ erfüllt, daher konvergiert der Funktionswert für alle Startwerte in $(0, \infty)$ gegen 1.

5 Stabile und Asymptotisch Stabile Equilibrien

Im Satz (4.2) wird eine Situation beschrieben, die man gerne verallgemeinern möchte: “stabile Equilibrien” sollten Umgebungen besitzen, sodaß Lösungen mit Startwert in der Umgebung nicht mehr aus dieser Umgebung ausbrechen und schlussendlich gegen das Equilibrien konvergieren. Leider läßt sich so eine Umgebung, aus der es kein Entkommen mehr gibt, nicht immer (und wenn, dann auch nur schwer) nachweisen. Es erweist sich, daß man sich das Leben langfristig leichter macht, wenn man eine zusätzliche “Analysis-Klausel” in die Definition einbaut.

Es sei $n > 0$. Es sei X eine offene Menge in \mathbb{R}^n und $x_0 \in X$ ein Punkt. Es sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Richtungsfeld, welches ein kontinuierliches dynamisches System durch die Differentialgleichung $\forall t : f'(t) = F(f(t))$ für $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ beschreibt.

Definition 5.1. Wenn $F(x_0) = 0$ ist, dann nennen wir x_0 ein Equilibrium für das dynamische System beschrieben durch F .

Wie schon erwähnt, ist für jedes Equilibrium x_0 die konstante Funktion $f(t) = x_0$ eine Lösung der Differentialgleichung mit Anfangswert x_0 .

Definition 5.2. Es sei x_0 ein Equilibrium. Wir nennen es ein stabiles Equilibrium, wenn für jede Umgebung U von x_0 eine Umgebung V von x_0 existiert, sodaß für jede Lösung f der Differentialgleichung mit Startwert $f(0) \in V$ ein $t_1 > 0$ existiert, sodaß $f(t) \in U$ gilt für alle $t > t_1$.

Ein Beispiel, bei dem die Analysis-Klausel schlagend wird, ist das dynamische System auf $X = \mathbb{R}^1$ gegeben durch die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) = t \sin(1/t)$ (für $t \neq 0$ definiert, in den Wert $t = 0$ stetig durch $F(0) = 0$ fortgesetzt). Die Equilibrien sind 0 und die Zahlen $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Für ungerade k ist die Voraussetzung von Satz (4.2) erfüllt, und diese Gleichgewichtspunkte sind daher auch stabil. Für gerade k haben wir eine zeitliche Umkehrung der Stabilität: die Lösungen in der Nähe driften vom Gleichgewichtspunkt weg. Diese sind also nicht stabil. Der interessanteste Gleichgewichtspunkte ist der Nullpunkt. In jeder Umgebung dieses Gleichgewichtspunkts befinden sich sowohl stabile als auch instabile Equilibrien vom vorigen Typ. Jede nichtkonstante Lösung wird von einem stabilen Equilibrium eingefangen, und zwar von einem der nicht weit weg vom Startwert ist (zumindest durch kein anderes Equilibrium getrennt). Für jede Umgebung U von 0 können wir daher eine Umgebung von V angeben, sodass U sowohl V als auch alle Equilibrien enthält, die mit die Lösungen mit Startwert in V einfangen. Mit anderen Worten: 0 ist ein stabiles Equilibrium.

Der Begriff Stabilität drückt zwar das “Nicht-Ausbrechen” aus, aber nicht die Limes-Eigenschaft. Wir definieren daher zusätzlich:

Definition 5.3. Es sei x_0 ein stabiles Equilibrium. Wir nennen es asymptotisch stabil, wenn eine Umgebung W von x_0 existiert, sodaß jede Lösung mit Startwert in W gegen x_0 konvergiert.

Wenn die Voraussetzungen von Satz (4.2) erfüllt sind, dann haben wir ein asymptotisch stabiles Equilibrium, wie man sich leicht überlegen kann. Im Beispiel vorhin ist das stabile Equilibrium bei 0 nicht asymptotisch stabil: die Grenzwerte existieren zwar immer, aber sind in der Regel

andere Equilibrien (solche mit ungeraden k). Wir haben aber noch ein viel einfacheres Beispiel eines stabilen, aber nicht asymptotisch stabilen Equilibriums, nämlich für das Richtungsfeld $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto 0$. Jeder Punkt ist ein Equilibrium, alle Equilibrien sind stabil, keines davon ist asymptotisch stabil.

In der Mathematik versuchen wir bei den Definitionen, so wenig wir möglich zu verlangen. Bei der Definition der asymptotischen Stabilität könnte man meinen, daß die Voraussetzung der Stabilität vielleicht überflüssig ist: es könnte sein, dass aus der Aussage

es existiert eine Umgebung W von x_0 , sodaß jede Lösung mit Startwert in W gegen x_0 konvergiert

schon die Stabilität von x_0 folgt. Im Fall $X \subset \mathbb{R}^1$ kann man zeigen, dass das tatsächlich der Fall ist: wenn die obige Aussage erfüllt ist, dann können sich die Nullstellen von F nicht bei x_0 häufen, sonst hätte jede mögliche Umgenung W ein weiteres Equilibrium und damit eine Lösung, die nicht gegen x_0 konvergiert. Die Voraussetzung von Satz (4.2) ist daher erfüllt, und damit haben wir Stabilität. Wir werden aber später zwei-dimensionale dynamische Systeme sehen, die ein Equilibrium haben, welches die obige Aussage erfüllt, die aber nicht stabil sind (und daher auch nicht asymptotisch stabil).