Stetigkeit der Nullstellen eines Polynoms

Es sei d eine positive ganze Zahl. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra existiert für jedes Polynom von Grad d eine Zerlegung in Linearfaktoren, die eindeutig ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren. Wir wollen zeigen, daß diese Faktorisierung in irgendeinem Sinn stetig ist.
Es sei $P_d \in \mathbb{C}[X]$ die Menge aller Polynome von Grad d mit Leitkoeffizient 1. Jedes dieser Polynom ist durch d Koeffizienten eindeutig festgelegt, deshalb können wir Polynome mit deren Koeffizientenvektoren identifizieren. Dadurch ist eine Metrik/Topologie auf P_d definiert. Es sei $z : \mathbb{C}^d \to P_d$ die Funktion

$$(a_1, \ldots, a_d) \mapsto (X - a_1) \cdots (X - a_d).$$

Diese Funktion ist stetig, weil die Koeffizienten der rechten Seite als Polynome in $a_1, \ldots, a_d$ ausgedrückt werden können. Die Funktion z ist surjektiv, aber nicht injektiv. Es gibt leider auch keine stetige Funktion $n : P_d \to \mathbb{C}^d$ sodaß $z \circ n = \mathrm{id}_{P_d}$ gilt (außer für $d = 1$). Wir müssen die Stetigkeit der Nullstellen irgendwie anders formulieren.
Zunächst wird ein Lemma benötigt.

Lemma 1. *Wenn $W \subset P_d$ beschränkt ist, dann ist auch $z^{-1}(W) \subset \mathbb{C}^d$ beschränkt.*

Beweis. Es sei $q := X^d + b_1 X^{d-1} + \ldots + b_d$ ein Polynom sodaß ein $M > 0$ existiert mit $b_i < \frac{M^i}{d}$ für $i = 1, \ldots, d$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > M$ die Ungleichung $|b_i z^{d-i}| < |z^d/d|$ für $i = 1, \ldots, d$. Aus der Dreiecksungleichung folgt, daß z keine Nullstelle von p sein kann.
Wenn $W \subset P_d$ beschränkt ist, dann lässt sich ein M finden, sodaß die Schranke oben für alle Polynome in W gilt. Die Nullstellen liegen dann alle in einem Kreis mit Radius M und es folgt, dass $z^{-1}(W)$ beschränkt ist. □

Die "Stetigkeit der Nullstellen" in Abhängigkeit der Koeffizienten wollen wir so verstehen: wenn die Koeffizienten eines Polynoms geringfügig geändert werden, verschieben sich die Nullstellen auch nur wenig. Für ein n-tupel $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^d$ und für jedes $\epsilon > 0$ soll ein $\delta > 0$ existieren, sodass jedes Polynom p_δ, das sich vom Polynom $p_0 := (X - a_1) \cdots (X - a_d)$ höchstens um δ unterscheidet, Nullstellen hat, die in ein einer ϵ-Umgebung von $(a_1, \ldots, a_d)$ liegen. Das ist equivalent zu:

Theorem 1. *Die Abbildung z ist offen: das Bild jeder offenen Menge ist offen.*

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{C}^d$ offen. Es sei V die Menge aller Permutationen von Elementen in U. Es sei $p : \mathbb{N} \to (P_d \setminus z(V))$ eine Folge im Kompliment von $z(V)$, die in P_d konvergent ist. Es sei $n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}^d$ eine Folge von Urbildern: für jedes $i \in \mathbb{N}$ wählen wir $n(i) \in z^{-1}(p(i))$. Da p eine konvergente Folge ist, ist p beschränkt. Aus Lemma 1 folgt, daß n beschränkt ist. Daher besitzt n eine konvergente Teilfolge $n' : \mathbb{N} \to \mathbb{C}^d$. Es sei $p' : \mathbb{N} \to P_d$ die entsprechende Teilfolge von p (d.h. $p'(i) = z(n'(i))$ für alle i). Die Menge V ist offen als Vereinigung (endlich vieler) offener Mengen. Das Komplement von V ist daher abgeschlossen. Also ist $\lim_{i\to\infty} n'(i)$ im Komplement von V. Es folgt

$$\lim_{i\to\infty} p(i) = \lim_{i\to\infty} p'(i) = \lim_{i\to\infty} z(n'(i)) = z\left(lim_{i\to\infty} n'(i)\right) \in z(\mathbb{C}^d \setminus V) = P^d \setminus z(V).$$

Also ist $P^d \setminus z(V)$ abgeschlossen und daher ist $z(U) = z(V)$ offen.

□