1 Grundbegriffe

Definition 1. Ein dynamisches System ist eine Beschreibung von Funktionen in einer reellen (kontinuierliches System) oder natürlichen (diskretes System) Variablen durch Differentialgleichungen (im kontinuierlichen Fall) oder Rekursionsgleichungen (im diekreten Fall). Charakteristisch f¨r die Beschreibung ist, daß das Verhalten der Funktionen, die durch diese Gleichung beschrieben ist, eindeutig von ihrem Wert an einer Anfangsstelle bestimmt ist (deterministisches System).

Definition 2. Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung zweier Funktionsterme, die aus folgenden Bausteinen gebildet werden:

- arithmetische Operationen $(+, \cdot, /)$;
- die Ableitung D (bei partiellen Differentialgleichungen: partielle Ableitungen);
- bestimmte und unbestimmte Funktionssymbole;
- einsetzen in bestimmte Funktionen.

Die Funktionssymbole stehen für differenzierbare Funktionen in einer oder mehreren reellen oder komplexen Variablen. Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen sind die unbestimmten Funktionen Funktionen einer Variablen.

Definition 3. Die Ordnung einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist die höchste Ordung der Ableitung der unbestimmten Funktion, die in der Gleichung vorkommt.

Definition 4. Eine Differentialgleichung heißt linear, wenn sie sich schreiben läßt als $T(y) = 0$, wobei y die gesuchte Funktion und T ein linearer Differentialoperator ist.

Ein linearer Differentialoperator ist rekursiv definiert als

- der identische Operator $y \mapsto y$,
- der Ableitungsoperator $D : y \mapsto y'$,
- die Summe zweier Differentialoperatoren,
- die Hintereinanderausführung zweier Differentialoperatoren,
- oder das Produkt eines Differentialoperators mit einer bestimmten Funktion.

Satz 1. *Die Lösungen einer linearen Differentialgleichungen bilden einen Vektorraum, m.a.W. die Lösungsmenge ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation mit Konstanten.*

Eine Differentialgleichung heißt *autonom* oder *zeitunabhängig*, wenn jede innerste Funktion entweder die gesuchte Funktion oder eine ihrer Ableitungen ist, so wie in

$$y^(k)(t) = F(y(t), y'(t), \ldots, y^{(k-1)}(t).$$

Die allgemeine Form der vektorwertigen autonomen Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion $\vec{y} : \mathbb{R} \to U$, wobei $U \subset \mathbb{R}^k$ und $k > 0$, ist

$$\forall t \in \mathbb{R} : \vec{y}'(t) = F(\vec{y}(t)),$$

wobei $F : U \to \mathbb{R}^k$ eine stetige Funktion ist. Diese Funktion wird auch als Vektorfeld oder Richtungsfeld bezeichnet.

Definition 5. Die obigen Begriffe (Ordnung, Linearität) sind in abgewandelter Form auch für Rekursionsgleichungen gültig. Bei Rekursionsgleichung wird der Funktionswert an einer Stelle n gleichgesetzt mit einem Ausdruck in Funktionswerten an Stellen kleiner als n. Wenn die kleinste dieser Stellen $n - k$ ist, dann heißt k die Ordnung der Rekursionsgleichung.

2 Rückführung auf Systeme erster Ordnung

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall (m¨glicherweise unbeschränkt). Eine Differentialgleichung für $x : D \to \mathbb{R}$ von Ordnung $k > 1$ der Form

$$\forall t \in D : x^{(k)}(t) = F(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(k-1)}(t)),$$

wobei $F : D \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist, läßt sich durch Einführung der Funktionen

$$y_1 = x, y_2 = x', \ldots, y_k = x^{(k-1)}$$

auf das System von Differentialgleichungen

$$\forall t \in D : y_1'(t) = y_2(t), \ldots, y_{k-1}'(t) = y_k(t),$$

$$y_k'(t) = F(t, y_1(t), \ldots, y_k(t))$$

zurückführen. Dieses System kann auch aufgefaßt werden als eine Differentialgleichung für eine vektorwertige Funktion $\vec{y} : D \to R^k$.

Die obige Rückführung erhält die Linearität einer Differentialgleichung.

Durch die Einführung einer neuen Variable $y_{k+1} : D \to \mathbb{R}$ und einer neuen Gleichung

$$\forall t \in D : y_{k+1}'(t) = 1$$

kann sogar auf den "zeitunabhängigen" oder "autonomen" Fall zurückgeführt werden, bei dem dir rechte Seite nicht von t abhängt. Diese Rückführung erhält aber die Linearität nicht mehr.

Analoge Rückführungen sind für den diskreten Fall möglich. Hier kann auf Rekursionsgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden.

3 Trennung der Variablen

Satz 2. *Es seien (a,b) und (c,d) reelle Intervalle. Es seien $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $g(y) \neq 0$ für alle $y \in (c,d)$. Es sei $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $G : (c,d) \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von f und $\frac{1}{g}$. Dann sind die Lösungen der Differentialgleichung*

$$y'(x) = f(x)g(y(x))$$

die Funktionen der Form $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist, die so gewählt ist, daß $F(x) + C$ im Wertebereich von G liegt.

Abgekürzte Schreibweise:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f(x)g(y) \\
\frac{dy}{g(y)} &= f(x)dx \\
\int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)dx + C \\
G(y) &= F(x) + C \\
y &= G^{-1}(F(x) + C)
\end{aligned}$$

Diese Schreibweise soll nur die rechnerische Durchführung der Methode der Trennung der Variablen erleichtern, als mathematische Herleitung der Lösung ist sie nicht geeignet, da mehrere Zwischenschritte offensichtlich formal fehlerhaft sind (angefangen damit, daß y gleichzeitig als numerische Variable und als Funktionsvariable auftritt).

Satz 3. *Die "Euler-homogene Differentialgleichung"*

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

läßt sich durch die Transformation $y(x) = xz(x), z(x) = \frac{y(x)}{x}$ auf eine Gleichung zurückführen, bei der die Variablen getrennt werden können.

Literatur: [3, II.8,II.9]

4 Integration in geschlossenen Ausdrücken

Definition 6. Ein Differentialkörper ist eine Menge von komplex-analytischen Funktionen, definiert auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$, die abgeschlossen ist bezüglich arithmetischen Operationen und Ableitung, und die die Menge der rationalen Funktionen enthält.

Definition 7. Es sei K ein Differentialkörper, $f_1, \dots, f_n \in K$ ungleich 0. Dann heißt der Körper, der von K und $e^{f_1}, \dots, e^{f_n}$ erzeugt wird, eine exponentielle Erweiterung von K.

Definition 8. Es sei K ein Differentialkörper, $f_1, \dots, f_n \in K$ ungleich 0. Dann heißt der Körper, der von K und $\log(f_1), \dots, \log(f_n)$ erzeugt wird, eine logarithmische Erweiterung von K.

Definition 9. Eine reelle oder komplexe Funktion heißt elementar, wenn sie in einer iterierten [exponentiellen oder logarithmischen] Erweiterung des Differentialkörpers der rationalen Funktionen enthalten ist.

Satz 4 (Liouville)**.** *Es sei K ein Differentialkörper, $f \in K$. Wenn f eine Stammfunktion in einer iterierten [exponentiellen oder logarithmischen] Erweiterung besitzt, dann hat f bereits eine Stammfunktion in einer logarithmischen Erweiterung.*

Der Risch-sche Algorithmus entscheidet, ob eine gegebene elementare Funktion eine elementare Stammmfunktion hat, und rechnet eine solche aus im Fall daß eine existiert. Eine wesentliche Grundlage des Risch-schen Algorithmus ist die Partialbruchzerlegung von rationalen Funktionen.

Literatur: [1]

5 Gleichgewichtspunkte und Stabilität (Definition)

Definition 10. Es sei k eine positive ganze Zahl, U eine offene zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^k$, $F : U \to \mathbb{R}^k$ ein Vektorfeld. Eine Punkt $x \in U$ heißt *Gleichgewichtspunkt* oder *Equilibrium* von F wenn $F(x) = 0$ ist.

Für jeden Gleichgewichtspunkt x hat die Differentialgleichung $\vec{y}'(t) = F(\vec{y}(t))$ eine konstante Lösung $t \mapsto x$.

Definition 11. Ein Gleichgewichtspunkt $x \in U$ heißt *stabil*, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodaß jede Lösung $\vec{y}$ mit Startwert $||\vec{y}(0) - x|| < \delta$ für $t > 0$ definiert ist und dort $||\vec{y}(t) - x|| < \epsilon$ erfüllt.

Ein stabiler Gleichgewichtspunkt heißt *asymptotisch stabil*, wenn zusätzlich gilt: es existiert $\epsilon > 0$, sodaß jede für Lösung $\vec{y}$ mit Startwert $||\vec{y}(0) - x|| < \epsilon$ gilt:

$$\lim_{t \to \infty} \vec{y}(t) = x.$$

Für diskrete dynamische Systeme der Form

$$\forall n \in \mathbb{N} : y_{n+1} = F(y_n),$$

wobei $F : U \to U$ eine stetige Funktion ist, wird Stabilität bzw. asymptotische Stabilität genauso definiert wird (hier steht dann t ausnahmsweise für eine natürliche Zahl).

Literatur: [2, I.1.3], [3, X.65]

6 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeine Gestalt der skalaren linearen Differentialgleichung von Ordnung k ist

$$y^{(k)} + a_1 y^{(k-1)} + \cdots + a_{k-1} y' + a_k y = 0, \tag{1}$$

wobei $a_1, \ldots, a_k$ reelle oder komplexe Konstanten sind, und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die unbestimmte Funktion ist. (Die obige Gleichung ist als Gleichheit von Funktionen zu verstehen, auf der rechten Seite steht die Nullfunktion $t \mapsto 0$.) Wir behandeln in erster Linie den reellen Fall.

Wir bezeichnen die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Definitionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $C^\infty(\mathbb{R})$. Die linke Seite von (3) läßt sich schreiben als $F(y) = 0$, wobei $F : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ der Operator

$$f \mapsto f^{(k)} + a_1 f^{(k-1)} + \cdots + a_{k-1} f' + a_k f$$

ist. Das charakteristische Polynom von (3) ist $P(T) = P_F(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_{n-1} T + a_n$.

Satz 5. *Es seien F_1, F_2 lineare Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten. Dann ist $F_1 \circ F_2$ wieder linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Es gilt*

$$P_{F_1 \circ F_2} = P_{F_1} P_{F_2} = P_{F_2 \circ F_1}.$$

Satz 6. *Es sei $F(y) = 0$ eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Es sei*

$$P(T) = (T - \lambda_1)^{e_1} \ldots (T - \lambda_m)^{e_m}, e_1 + \cdots + e_m = n$$

die Zerlegung vom charakteristischen Polynom in komplexe Linearfaktoren. Dann sind die Lösungen von $F(y) = 0$ genau die Linearkombinationen der Lösungen

$$e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_1 x} x^{e_1 - 1}, \ldots, e^{\lambda_m x}, \ldots, e^{\lambda_m x} x^{e_m - 1}.$$

Insbesondere bilden die Lösungen einen Vektorraum der Dimension n.

Im reellen Fall erhält man durch den obigen Satz nur eine Basis von komplexwertigen Lösungen. Diese lassen sich aber mit Hilfe der Eulerschen Formeln durch reelle Basislösungen ersetzen. Zum Beispiel erzeugen die Funktionen $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$y_1(t) = e^{(a+bi)t}, y_2(t) = e^{(a-bi)t}$$

über $\mathbb{C}$ den selben Vektorraum wie die Funktionen $x_1, x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x_1(t) = e^{at} \cos(bt), x_2(t) = e^{at} \sin(bt).$$

Die Funktionen x_1, x_2 sind jedoch reellwertig und erzeugen über $\mathbb{R}$ alle reellwertigen Lösungen.

Beim Anfangswertproblem sind zusätzlich zur Gleichung 3 die Anfangsbedingungen

$$y(a) = b_0, y'(a) = b_1, \dots, y^{(n-1)}(a) = b_{n-1} \tag{2}$$

vorgegeben, wobei $a, b_0, \dots, b_{n-1}$ gegebene reelle oder komplexe Zahlen sind.

Satz 7. *Das Anfangswertproblem 3,2 besitzt eine eindeutige Lösung.*

Wenn $y_1, \dots, y_n$ eine Basis des Lösungsraumes ist, dann ist die Wronskische Determinante $\begin{bmatrix} y_1(a) & y_1'(a) & \dots & y_1^{(n-1)}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n(a) & y_n'(a) & \dots & y_n^{(n-1)}(a) \end{bmatrix}$ *ungleich 0.*

Literatur: [3, IV.15]

7 Lineare Rekursionen mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeine Gestalt der skalaren linearen Rekursion von Ordnung k mit konstanten Koeffizienten ist

$$\forall n \in \mathbb{N} : y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \dots + a_{k-1} y_{n-1} + a_k y_n = 0, \tag{3}$$

wobei $a_1, \dots, a_k$ reelle oder komplexe Konstanten sind, und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die unbestimmte Funktion ist.

Wir bezeichnen die Menge aller Folgen in $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Die linke Seite von (3) läßt sich schreiben als $F(y) = 0$, wobei $F : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Operator

$$(f_n)_n \mapsto f^{(k)} + a_1 f^{(k-1)} + \dots + a_{k-1} f' + a_k f$$

ist. Das charakteristische Polynom von (3) ist $P(T) = P_F(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_{n-1} T + a_n$.

Die Menge der Operatoren $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, die in der Form wie oben dargestellt werden können, bildet mit der punktweisen Addition und der Komposition als Multiplikation einen Ring. Dieser ist kommutativ und isomorph zum Polynomring $\mathbb{R}[T]$. Die Variable T entspricht dem Shift-Operator $(f_n)_n \mapsto (f_{n+1})_n$.

Nach Theorem 5 ist $\mathbb{R}[T]$ auch isomorph zum Ring der linearen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten. Daher sind auch die beiden Operatorenringe isomorph. Für jede analytische Funktionen f und jeden Differentialoperator F bildet der entsprechende Folgenoperator die Folge der Ableitungen von f bei 0 auf die Folge der Ableitungen von $F(f)$ bei 0 ab.

Satz 8. *Es sei $F(y) = 0$ eine lineare Rekursionsgleichung k-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Es sei*

$$P(T) = (T - \lambda_1)^{e_1} \dots (T - \lambda_m)^{e_m}, e_1 + \dots + e_m = n$$

die Zerlegung vom charakteristischen Polynom in komplexe Linearfaktoren. Dann sind die Lösungen von $F(y) = 0$ genau die Linearkombinationen der Folgen

$$({\lambda_1}^n)_n, \dots, ({\lambda_1}^n n e_1 - 1)_n, \dots, (\lambda_m)^n)_n, \dots, ({\lambda_m}^n n^{e_m - 1})_n.$$

Die Parallele zu den linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten läßt sich wie folgt erklären. Es sei $\mathcal{A}$ die Menge der analytischen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Taylorentwicklung bei 0 den Konvergenzradius unendlich hat. Es sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Folgen $(a_n)_n$, für die $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}} = 0$ ist. Dann ist durch $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{F}$ und $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{A}$,

$$\rho(f) := (f^{(n)}(0))_n, \qquad \sigma((a_n)_n) = \left(x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \right)$$

ein Isomorphismus gegeben, der den Lösungsraum der linearen Differentialgleichung in den Lösungsraum der Rekursion mit gleichem charakteristischem Polynom überführt.

Literatur: [2, III.15.1]

8 Variation der Konstanten

Die allgemeine Gestalt der inhomogenen linearen Differentialgleichung ist

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f, \tag{4}$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ reelle oder komplexe Konstanten sind, und $y : U \to \mathbb{R}$ eine gesuchte Funktion von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist, und $f : U \to \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion ist.

Es sei $y_1, \ldots, y_n$ eine Basis für den Vektorraum der Lösungen, und $C_1, \ldots, C_n : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen, die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
C_1' y_1 + \cdots + C_n' y_n &= 0, \\
C_1' y_1' + \cdots + C_n' y_n' &= 0, \\
&\ldots, \\
C_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\
C_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + C_n' y_n^{(n-1)} &= f
\end{aligned}$$

erfüllen. Diese Funktionen können durch Lösen eines linearen Gleichungssystems und anschließend Integration gefunden werden. Es existiert immer eine Lösung des Gleichungssystems, weil die Wronskische Determinante ungleich 0 ist. Dann ist $C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung 4.

Die Methode der Variation der Konstanten funktioniert auch, wenn $a_1, \ldots, a_n$ keine reellen Konstanten, sondern stetige Funktionen von U nach $\mathbb{R}$ sind. Wir werden später zeigen, daß n Basislösungen für die homogene Gleichung existieren und daß die Wronskische Determinante auch in diesem Fall ungleich 0 ist.

Literatur: [3, IV.16,V.24]

9 Reduktion der Ordnung von linearen Differentialgleichungen

Die allgemeine Gestalt der linearen Differentialgleichung von Ordnung n mit variablen Koeffizienten ist

$$\forall t : y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)y'(t) + a_n(t)y(t) = f(t), \qquad (5)$$

wobei y die gesuchte Funktion von $D \subset \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist, und $a_1, \ldots, a_n, f : D \to \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktionen sind.

Für $n = 1$ ist die Methode der Trennung der Variablen anwendbar.

Für $n > 1$ gibt es im allgemeinen keine Darstellung der Lösung durch Integrale (dies ist ein Resultat der Differential-Galoistheorie). Man kann aber die Ordnung reduzieren, wenn eine Lösung bekannt ist: Es sei $u : D \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung 5, die auf D nirgends 0 ist. Dann setzt man $y = uz$ in die Gleichung 5 ein und vereinfacht. Nach einer Division durch u erhält man eine Differentialgleichung der Ordung n für z, in welcher der Koeffiezient von z Null ist. Diese Gleichung kann man auffassen als eine Gleichung für z' der Ordnung $n - 1$.

Literatur: [3, V.23]

10 Systeme linearer Diffentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Ein System von n linearen Differentialgleichungen für n gesuchte Funktionen läßt sich schreiben als $\vec{x}' = A\vec{x}$, wobei $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine gesuchte vektorwertige Funktion ist, und A eine $n \times n$-Matrix reeller oder komplexer Konstanten ist. Wir behandeln den komplexen Fall.

Formal kann das Anfangwertproblem

$$\vec{x}' = A\vec{x},\ \vec{x}(0) = \vec{a},\ \vec{a} \in \mathbb{C}^n \text{ gegeben}$$

durch einen Potenzreihenansatz gelöst werden. Man erhält

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{a}, e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \ldots$$

Zur Berechnung von e^{tA} verwenden wir die Jordan'sche Normalform $J = T^{-1}AT$, wobei die Spalten von T gewisse Verallgemeinerungen von Eigenvektoren sind, und J eine Diagonalblockmatrix mit Blöcken der Gestalt $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}$ sind, wobei λ ein Eigenwert ist. Zur Berechnung der Jordanschen Normalform wird auf das Skriptum von Erhard Aichinger verwiesen.

Vermittels der Jordanschen Normalform bekommt man die Jordansche Zerlegung

$$A = N + H, NH = HN,$$

in eine nilpotente Matrix N und eine diagonalisierbare Matrix H. Für kommutierende Matrizen (also Matrizen A, B mit $AB = BA$) gilt $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$. Für nilpotente Matrizen bricht die Exponentialreihe ab, weil $N^i = 0$ ist für $i \geq n$. Falls D eine Diagonalmatrix mit Einträgen $a_1, \ldots, a_n$ ist, so ist e^{tD} eine Diagonalmatrix mit Einträgen $e^{ta_1}, \ldots, e^{ta_n}$. Für eine diagonalisierbare Matrix $H = TDT^{-1}$ gilt $e^{tH} = Te^{tD}T^{-1}$.

Wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, dann ist $\lim_{t\to\infty} e^{tA}$ die Nullmatrix, und alle Lösungen des Differentialgleichungssystems konvergieren gegen den Nullpunkt. Der Nullpunkt ist dann ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Literatur: [2, III.8.1-3]

11 Variation der Konstanten für Systeme

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall. Es sei $D \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine matrix-wertige stetige Funktion. Für eine vektorwertige Funktion $y : D \to \mathbb{R}$ betrachtet man die homogene lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten

$$\forall t : y'(t) - A(t)y(t) = 0. \tag{6}$$

Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz (wird später behandelt) ist das Anfangswert für diese Gleichung für jede Stelle t_0 und Anfanswert $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. Für fixes t_0 definieren wir eine matrix-wertige Funktion $B_{t_0} : D \to \mathbb{R}^{n\times n}$, deren m-te Spalte die Lösung von Gleichung 6 mit $y_m(t_0) = e_m$ (der m-te Einheitsvektor) ist. Wegen der Linearität ist die Lösung mit Anfangsvektor $y(t_0) = x$ gleich $y(t) = B_{t_0}(t)x$. Für jedes $t_0 \in D$ und t ist $B_{t_0}(t)$ invertierbar, die inverse Matrix ist $B_t(t_0)$. Die Matrixfunktion B_{t_0} erfüllt die Differentialgleichung $(B_{t_0})' = AB_{t_0}$.

Wenn B_t bekannt ist, kann man die inhomogene Gleichung

$$\forall t : y'(t) - A(t)y(t) = b(t), \tag{7}$$

wobei $b : D \to \mathbb{R}^n$ eine gegebene stetige Funktion ist, durch den Ansatz $y(t) = B_{t_0}z(t)$ lösen. Nach Einsetzen und Kürzen erhält man $B_{t_0}(t)z'(t) = b(t)$ oder äquivalent dazu

$$z'(t) = (B_{t_0}(t))^{-1}b(t),$$

und eine spezielle Lösung von (7) kann durch Integration berechnet werden. Die allgemeine Lösung von (7) läßt sich schreiben als spezielle Lösung plus allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (6).

Literatur: [3, VIII.58]

12 Existenz und Eindeutigkeit

Ein metrischer Raum X mit Metrik $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in X einen Grenzwert in X hat.

Es sei $D \subset \mathbb{R}$ ein (offenes oder geschlossenes, beschränktes oder unbeschränktes) Intervall. Es sei $C_b^0(D, \mathbb{R}^k)$ die Menge der stetigen und beschränkten Funktionen von D nach $\mathbb{R}^k$.

Satz 9. *Die Menge $C_b^0(D, \mathbb{R}^k)$ ist bezüglich der Norm $(f, g) \mapsto \sup_{x \in D} ||f(x) - g(x)||$ stetig, wobei $|| \cdot ||$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^k$ ist.*

Proof. Es sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge von stetigen Funktionen. Für jedes x ist dann auch die Folge der Funktionswerte $(f_n(x))_n$ Cauchy, weil $|f_m(x) - f_m(x)| \leq d(f_m, f_n)$ gilt. Die reellen Zahlen sind vollständig, daher existiert der Grenzwert und wir können die Grenzfunktion $\bar{f} : D \to \mathbb{R}$ definieren durch $\bar{f}(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

Um zu zeigen daß $\bar{f}$ stetig ist, wählen wir $\epsilon > 0$ und n so, daß $d(f_n, \bar{f}) < \epsilon/3$ ist. Wir wählen auch ein kompaktes Teilintervall $I \subset D$, in diesem ist f_n gleichmäßig stetig und es existiert δ mit $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \epsilon/3$. Dann ist wegen der Dreiecksungleichung $|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| \leq |\bar{f}(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - \bar{f}(y)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$ für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$, also ist $\bar{f}$ gleichmäßig stetig in I. Das gilt für jedes kompakte Teilintervall, daher ist $\bar{f}$ in ganz D stetig. ◻

Satz 10 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Es sei X ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung, das heißt es existiert $c < 1$ sodaß für alle $x, y \in X$ gilt $d(f(x), f(y)) \leq c d(x, y)$. Dann besitzt f einen eindeutigen Fixpunkt.*

Satz 11 (Picard/Lindelöf)**.** *Es sei D ein Intervall (offen oder abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt), k eine positive ganze Zahl, $F : D \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ eine stetige Funktion, die die Lipschitz-Bedingung erfüllt: es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$, sodaß für alle $x \in D, y, z \in \mathbb{R}^k$ gilt $||F(x, y) - F(x, z)|| \leq L||y - z||$. Es sei $x_0 \in D$, $y_0 \in \mathbb{R}^k$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$y'(x) = F(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung $y : D \to \mathbb{R}^k$.

Proof. Wir beweisen den Satz zunächst für ein kompaktes Teilintervall $I = [a, b]$ in D. Wir definieren den Operator $P : C_b^0(I) \to C_b^0(I)$ durch

$$f \mapsto P(f), P(f)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t)) dt$$

Jede Lösung des Anfangwertproblems ist ein Fixpunkt von P, und umgekehrt ist jeder Fixpunkt differenzierbar und löst das Anfangswertproblem. Durch Abschätzen des Integrals zeigt man die Ungleichung

$$d(P(f), P(g)) \leq L(b - a) d(f, g)$$

für alle $f, g \in C_b^0(I)$.

Falls $L(b-a) < 1$ ist, gilt die Existenz und Eindeutigkeit wegen Satz 10. Im allgemeinen Fall, bzw. falls D nicht kompakt ist, kann man D überdecken durch überlappende kompakte Teilintervalle und bekommt die Existenz und Eindeutigkeit durch Fortsetzen der Lösung auf den Teilintervallen. □

Der Satz von Picard/Lindelöf gilt auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung, weil diese durch Einführung von Geschwindigkeitskoordinaten auf vektorielle Differentialgleichungen zurückgeführt werden können. Hier sind auch die Werte der Ableitungen bis zur Ordnung minus 1 an der Anfangsstelle vorzugeben.

Literatur: [3, III.12, IX.60]

13 Folgerungen aus Picard/Lindelöf

Satz 12. *Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es seien $a_1, \ldots, a_n, b : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $x_0 \in D$, $y_0, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$y^{(n)}(x)+a_1(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_n(x)y(x) = b(x), y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

eine eindeutige Lösung.

Proof. Auf jedem kompakten Teilintervall erfüllt die Funktion $F : D \times R^n \to \mathbb{R}^n$,

$$(x, y_0, \ldots, y_{n-1}) \mapsto (y_1, \ldots, y_{n-1}, b(x) - a_1(x)y_{n-1} - \cdots - a_n(x)y_0)$$

eine Lipschitzbedingung. Daher kann man die vektorielle Version von Satz 11 anwenden. □

Aus dem Beweis (nicht in dieser Zusammenfassung enthalten) des Banachschen Fixpunktsatzes 10 erhält man die Abschätzung für die Entfernung zum Fixpunkt $\bar{x}$:

$$d(x, \bar{x}) \leq \frac{d(x, f(x))}{1-c}.$$

Diese Abschätzung erlaubt, die Genauigkeit einer Näherungslösung abzuschätzen.

Wir betrachten zum Beispiel das Euler'sche Polygonzugverfahren. Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L. Es seien $a, b, y_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in [a, b]$. Wir approximieren die Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = F(y(x))$, $y(a) = y_0$ wie folgt: Zuerst wird das Intervall unterteilt in N gleich große Teilintervalle. Wir setzen $h := \frac{b-a}{N}$, $x_i := a + ih$ und für $i = 0, \ldots, N$ (d.h. $x_0 = a, x_N = b$). DDann setzen wir $p_i = F(y_i)$ und $y_{i+1} := y_i + p_i h$ für $i = 0, \ldots, N-1$. Die approximierende Funktion ist nun die stückweise lineare Funktion z, für die $z(x_i) = y_i$ gilt: im Intervall $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ist $z(x) = y_i + p_i(x - x_i)$. In jedem Intervall gilt die Abschätzung

$$\left| y_{i+1} - y_i - \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(z(t))dt \right| = \left| F(y_i)h - \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(z(t)))dt \right| =$$

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}(F(y_i)-F(z(t))dt\right| \leq L\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}(y_i)-z(t))dt\right| =$$
$$L\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}p_i(t-x_i)dt\right| = Lp_i\frac{h^2}{2} = \frac{Lp_i(b-a)^2}{2N^2}.$$

Die Distanz $d(z,P(z))$ kann abgeschätzt werden durch die Summe von höchstens N der Teil-Abschätzungen, und das ist nach oben beschränkt durch $\frac{LM(b-a)^2}{2N}$, wobei M eine obere Schranke für F ist. Für große N geht der Fehler gegen Null.

Um die Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert zu untersuchen, nehmen wir an, daß f,g beide die Differentialgleichung erfüllen, aber verschiedene Anfangswerte haben: $f(x_0)=y_0$, $g(x_0)=z_0$. Dann betrachtet man g als Näherungslösung für das Anfangswertproblem mit Anfangsbedingung $y(x_0)=y_0$ und bekommt die Abschätzung $|f(x_1)-g(x_1)| \leq \frac{|y_0-z_0|}{1-L|x_1-x_0|}$ im Fall daß der Nenner positiv ist. Andernfalls führt Unterteilung des Intervalls zu einer Abschätzung, die allerdings exponentiell in der Länge des Intervalls ist.

Die Stetigkeit in den Anfangsbedingung ist auch für den vektoriellen Fall erfüllt (mit einer ähnlichen Abschätzung).

Wenn die rechte Seite der Differentialgleichung stetig von Parametern abhängt, dann ist die Lösung ebenfalls stetig in den Parametern. Das läßt sich dadurch zeigen, daß man die Parameter als zusätzliche Koordinaten der gesuchten Funktion einführt, deren Ableitung konstant gleich 0 ist.

Literatur: [3, III.13]

14 Der Fluß eines Vektorfeld

Es sei $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit beschränkter Ableitung (damit die Lipschitz-Bedingung erfüllt ist). Es sei $\phi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ die Abbildung, die durch die Bedingungen $\phi(0,\vec{y})=\vec{y}$ for all $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, $\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,y)=F(\phi(t,y))$ definiert ist. Sie beschreibt die Lösung in Abhängigkeit von den Anfangswerten und ist daher stetig. Sie erfüllt die Funktionalgleichung

$$\phi(t_1+t_2,\vec{y})=\phi(t_1,\phi(t_2(\vec{y})), \tag{8}$$

insbesondere ist $\phi_t:R^n\to\mathbb{R}^n$, $\phi_t(\vec{y})=\phi(t,\vec{y})$ invertierbar mit inverser Abbildung ϕ_{-t}. Die Abbildung ϕ heißt Fluß des Vektorfeldes $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.

Wenn das Richtungsfeld F nicht Lipschitz-stetig ist, dann muß der Fluß nicht überall definiert sein. Wenn F differenzierbar ist, dann ist die Lipschitzbedingung zumindest lokal auf jeder kompakten Teilmenge erfüllt, und für jeden Punkt $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ ist der Fluß lokal in einer einen offenen Umgebung von $(0,\vec{y})$ definiert.

Satz 13. *Es sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und $F:U\to\mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist der Fluß ϕ in seinem ganzen Definitionsbereich differenzierbar.*

Proof. Es sei $\vec{y} \in U$ fix gewählt. Es ist schon gezeigt, daß ϕ stetig ist, außerdem existiert die “Zeitableitung” $\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, \vec{y}) = F(t, \phi(t, \vec{y}))$. Es reicht zu zeigen, daß die “Raumableitung” $\frac{\partial \phi}{\partial \vec{y}}$ existiert und stetig ist (der Wert der Raumableitung ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$). Wir zeigen nur den Fall $n = 1$.

Es sei $z \in U$, $z \neq y (= \vec{y})$. Es ist zu zeigen, daß die parameterabhängige Funktion $g_z : t \mapsto \frac{\phi(t,z)-\phi(t,y)}{z-y}$ für $z \to y$ konvergiert (der Grenzwert ist dann die Raumableitung). Die Abbildung $x \mapsto \phi(t, x)$ ist injektiv für alle t im Definitionsbereich, daher ist $\phi(t, z) - \phi(t, y) \neq 0$ gilt. Es gilt

$$\partial t g_z(t) = \frac{\partial_t \phi(t, z) - \partial_t \phi(t, y)}{z - y} = \frac{\partial_t \phi(t, z) - \partial_t \phi(t, y)}{\phi(t, z) - \phi(t, y)} \frac{\phi(t, z) - \phi(t, y)}{z - y}.$$

Mit der Definition $v_z(t) = \frac{F(\phi(t,z))-F(\phi(t,y))}{\phi(t,z)-\phi(t,y)}$ erfüllt g_z die Differenzialgleichung $g_z'(t) = v_z(t) g_z(t)$ und die Anfangsbedingung $g_z(0) = 1$. Dieses Anfangswertproblem ist linear, und nach Satz 12 ist der Grenzübergang $z \to y$ erlaubt. Da F differenzierbar ist, ist $\lim_{z \to y} v_z(t)$ definiert und gleich $w(t) := F'(\phi(t, y))$. Daher existiert auch die Raumableitung h als Lösung des Anfangwertproblems $h'(t) = w(t)h(t), h(0) = 1$. □

Definition 12. Es sei k eine positive ganze Zahl. Es seien $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^k$ offene und zusammenhängende Mengen, $F_1 : D_1 \to \mathbb{R}^k$ und $F_2 : D_2 \to \mathbb{R}^k$ Vektorfelder, $p_1 \in D_1$ und $p_2 \in D_2$. Wir sagen F_1 *ist bei* p_1 *lokal topologisch äquivalent zu* F_2 *bei* p_2 wenn für Umgebungen $U_1 \subset D_1, p_1 \in U_1$ und ein Homöomorphimus $f : U_1 \to U_2$ existiert, der jede Lösungskurve in eine Lösungskurve abbildet, und der auf den Lösungskurven die lineare Ordnung erhält, die durch die Parametrisierung mit t gegeben ist (informell ausgedrückt: der das Phasenbild inklusive Richtung der Pfeile erhält).

Definition 13. Es sei k eine positive ganze Zahl, $D \subset \mathbb{R}^k$ eine offene und zusammenhängende Menge, $F : D \to \mathbb{R}^k$ ein differenzierbares Vektorfeld, und $p \in D$ ein Punkt sodaß $F(p) \neq 0$ ist. Eine Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^k$ durch p heißt transversal zu F bei p, wenn der Vektor $F(p)$ nicht in dem Vektorraum $H - \{p\}$ (Hyperebene H verschoben, sodaß die durch den Nullpunkt geht) enthalten ist.

Satz 14. *Es sei k eine positive ganze Zahl, $D \subset \mathbb{R}^k$ eine offene und zusammenhängende Menge, $F : D \to \mathbb{R}^k$ ein differenzierbares Vektorfeld, und $p \in D$ ein Punkt sodaß $F(p) \neq 0$ ist. Dann ist F bei p lokal äquivalent zum konstanten Vektorfeld $(x_1, \ldots, x_n) \to (1, 0, \ldots, 0)$ bei $(0, \ldots, 0)$.*

Proof. Es sei H eine transversale Hyperebene. Dann ist die Flußabbildung ϕ eingeschränkt auf $\mathbb{R} \times H$ auf einer Umgebung von $(0, p)$ definiert und differenzierbar. Die Jacobi-Matrix bei $(0, p)$ ist nicht singulär, daher ist die Abbildung ein lokaler Homöomorphismus. Sie bildet die Lösungskurven des konstanten Vektorfelds (Geraden) auf L¨sungskurven von F ab. □

Es folgt, daß zwei Nicht-Gleichgewichtspunkte bei gleicher Dimension immer lokal äquivalent sind.

Literatur: leider ist dieses Kapitel in keinem der beiden Bücher enthalten.

15 Analyse von Gleichgewichtspunkten

Es sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist die Richtungsableitung definiert als

$$\delta_F(f) = F_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + F_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Wenn $x : \mathbb{R} \to U$ eine Lösungskurve ist, dann ist $\delta_F(f)(\vec{x})$ die Ableitung der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x(t))$.

Satz 15. *(Ljapunov) Es sei $p \in U$ ein Equilibrium. Wenn eine differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ existiert, die bei p ein globales Maximum annimmt, und deren Richtungsableitung auf $U \setminus \{p\}$ positiv ist, dann ist p asymptotisch stabil. Eine solche Funktion heißt auch* strenge Ljapunov-Funktion*.*

Bei Gleichgewichtspunkten ist die Richtungsableitung jeder Funktion gleich Null. Eine Funktion f ist also dann strikt Ljapunov beim Gleichgewichtspunkt p, wenn p gleichzeitig lokales Maximum von f und lokales Minimum von $\delta_F(f)$ ist.

Proof. Die Lösungskurven können die Teilgebiete $\{x \mid f(x) < a\}$, wobei $a > f(p)$ ist, nie verlassen. Außerdem ist die Ableitung der Funktion $t \mapsto f(x(t))$ stets negativ für $x(t) \neq p$, daher ist $\lim_{t\to\infty} x(t) = p$ für alle Lösungskurven. □

Satz 16. *Es sei $p \in U$ ein Equilibrium, sodaß die Eigenwerte der Jacobi-Matrix bei p $\frac{\partial F}{\partial(x_1,\ldots,x_k)}|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ alle positiven bzw. negativen Realteil haben. Dann ist p asymptotisch stabil.*

Definition 14. Ein Gleichgewichtspunkt, bei dem die Eigenwerte der Jacobi-Matrix Realteil ungleich Null haben, heißt hyperbolischer Gleichgewichtspunkt.

Satz 17 (Hartmann-Grobmann)**.** *Es sei $p \in U$ ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des Richtungsfelds bei $F : D \to \mathbb{R}^k$. Es sei $J \in \mathbb{R}^{k\times k}$ die Jacobi-Matrix von F bei p. Dann ist F bei p lokal äquivalent zum linearen Richtungsfeld $x \mapsto Jx$ bei 0.*

Definition 15. Eine *Senke* ist ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt. Eine *Quelle* ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt, der bei der Multiplikation des Richtungsfelds mit -1 asymptotisch stabil wird. Ein *Sattelpunkt* ist ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt, der weder eine Quelle noch eine Senke ist.

Satz 18. *Es sei $n \in \mathbb{N}$, $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$ zwei offene und zusammenhängende Gebiete, $F_1 : D_1 \to \mathbb{R}^n$ und $F_2 : D_2 \to \mathbb{R}^n$ zwei differenzierbare Richtungsfelder, $p_1 \in D_1$ und $p_2 \in D_2$ hyperbolische Gleichgewichtspunkte von F_1 bzw. F_2. Dann ist F_1 bei p_1 lokal äquivalent zu F_2 bei p_2, wenn die Anzahl der Eigenwerte der Jacobimatrix von $J(F_1)|_{p_1}$ mit positivem Realteil gleich der Anzahl der Eigenwerte der Jacobimatrix von $J(F_2)|_{p_2}$ mit positivem Realteil ist.*

Es sei m die Anzahl der Eigenwerte der Jacobimatrix von $J(F_1)|_{p_1}$ mit positivem Realteil. Wenn $m = 0$ ist, dann ist p_1 eine Senke; wenn $m = n$ ist, ist p eine Quelle; in allen anderen Fällen ist p ein Sattelpunkt.

Im Fall $n = 2$ sind alle Sattelpunkte lokal äquivalent. Für jeden Sattelpunkt gibt es 4 ausgezeichnete Orbits, zwei "hineingehende" und zwei "hinausgehende" Orbits.

Literatur: [2, III.8.3,III.9.1,III.9.3]

16 Zyklen von Diskreten Dynamischen Systemen

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet, $F : U \to U$ stetig differenzierbar. Ein diskretes dynamisches System ist beschrieben durch die Rekursion

$$x_{n+1} = F(x_n), x_0 \in U.$$

Mit dem Startwert x_0 ist die Folge $(x_n)_n$ eindeutig bestimmt. Ein k-Zykel ($k > 0$) liegt vor, wenn die Folge periodisch mit Periode k ist. Die 1-Zyklen entsprechen genau den Fixpunkten von F. Jeder k-Zykel beginnt mit einem Fixpunkt von F^k, und umgekehrt ist jede Folge mit einem Fixpunkt von F^k als Startwert ein l-Zykel mit $l|k$.

Ein Zykel heißt *Attraktor* oder *stabiler Zykel*, wenn eine offene Umgebung von des Startwertes existiert, sodaß jede Folge, die in dieser Umgebung startet, gegen den Zykel konvergiert.

Satz 19. *Es sei $(x_1, \ldots, x_k)$ ein k-Zykel mit Startwert x_1. Wenn die Eigenwerte der Jacobi-matrix von F^k bei x_1 Betrag kleiner als 1 haben, dann ist der Zykel ein Attraktor.*

Für $n = 1$ gibt es einen einfachen, aber wichtigen Spezialfall, nämlich den Fall daß F monoton steigend ist. In diesem Fall ist jede Folge, die durch die Rekursion von F definiert ist, monoton steigend oder fallend. Falls sie konvergiert, dann ist der Grenzwert ein Fixpunkt. Andere Zyklen existieren nicht.

Jede quadratische Rekursion $x_{n+1} = ax_n^2 + bx_n + b$, die mindestens einen Fixpunkt hat, läßt sich durch eine lineare Koordinatentransformation auf eine "logistische" Rekursion $x_{n+1} = F(x_n) = rx_n(1 - x_n)$ mit $r \geq 1$ überführen. Sobald die Folge ein Glied außerhalb des Intervalles $[0, 1]$ hat, divergiert sie gegen $-\infty$.

Wenn $r \leq 4$, dann bleibt jede Folge mit Startwert in $[0, 1]$ in diesem Intervall. Die Struktur der Zyklen hängt von r ab und nimmt an Komplexität zu, wenn r größer wird.

Für $r = 4$ ist die Rekursion auf dem gesamten Intervall $[0, 1]$ chaotisch, das heisst die Zykel liegen dicht und für zwei beliebige offene Mengen existiert eine Folge mit Werten in beiden offenen Mengen (topologische Vermischung).

Für $r > 4$ divergieren die meisten zufällig gewählten Folgen mit Startwert in $[0, 1]$ gegen $-\infty$, es gibt aber eine Teilmenge, auf der das Verhalten chaotisch ist.

Der folgende Satz gilt für beliebige Rekursionen erster Ordung. Siehe auch folgenen Übersichtsartikel.

Die Sharkowski-Ordnung ist folgende lineare Ordung auf den natürlichen Zahlen:

$$1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd \ldots 2^2 7 \lhd 2^2 5 \lhd 2^2 3 \lhd \ldots 2 \cdot 7 \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \ldots 7 \lhd 5 \lhd 3$$

Satz 20 (Sharkowski)**.** *Wenn $m \lhd n$, dann hat jede Funktion, die einen n-Zykel hat, auch einen m-Zykel; und es existiert eine Funktion, die einen m-Zykel, aber keinen n-Zykel hat.*

Zum Beispiel hat jede Funktion, die einen 3-Zykel hat, Zyklen beliebiger Länge, und jede Funktion die überhaupt einen Zykel hat, hat auch einen Fixpunkt.

Literatur: [2, I.3]

17 Zyklen von Kontinuierlichen Systemen

Es sei wieder $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^n, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n))$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Eine Lösungskurve $z : \mathbb{R} \to U$ mit $z(t + h) = z(t)$ für alle t heißt Zykel oder periodischer Orbit. Wenn für eine andere Lösungskurve $x : \mathbb{R}_+ \to U$ gilt, daß für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ und $N > 0$ ein $t_1 > N$ existiert, sodaß $||x(t_1) - z(t_0)|| < \epsilon$ gilt, dann sagen wir daß die Kurve x sich asymptotisch an den Zykel z annähert.

Definition 16. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Es sei H eine Hyperebene die auf jedem ihrer Punkte transversal zu F ist. Die Poincaré-Abbildung $\Phi : (H \cap U) \dashrightarrow (H \cap U)$ ist definiert als die partielle Funktion, die jedem Punkt $p \in H \cap U$ den ersten Punkt zuordnet, bei dem der Orbit durch p die Menge $H \cap U$ wieder schneidet:

$$t_0 := \min\{t > 0 \mid \phi(t, p) \in H \cap U\}, \Phi(p) := \phi(t_0, p).$$

Falls so ein t_0 nicht existiert, oder falls der Orbit in t_0 tangential zu H ist, dann ist $\Phi(p)$ nicht definiert.

Satz 21. *Der Definitionsbereich der Poincaré-Abbildung ist offen. Die Poincaré-Abbildung ist in ihrem Definitionsbereich differenzierbar.*

Proof. Es sei $x_0 \in H \cap U$ ein Punkt, in dem Φ definiert ist, also für den ein t_0 existiert mit $t_0 > 0$ und $x_1 := \phi(t_0, x_0) \in H$. Es sei $\alpha : \mathbb{R} \times H \to U$ die Einschränkung des Flußes auf H. Das Bild der Ableitung von α bei $(0, x_0)$ enthält H (als Bild der Raumableitung) und die Gerade in Richtung das Richtungsfelds (als Bild der partiellen Ableitung nach t). Nachdem F die Hyperebene H tranversal schneidet, ist die Ableitung von α bei $(0, x_0)$ invertierbar. Daher ist α lokal bei $(0, x_0)$ invertierbar mit differenzierbarer Umkehrabbildung. Analog dazu ist α lokal bei $(0, x_1)$ invertierbar mit differenzierbarer Umkehrabbildung.

Die Abbildung $\gamma : U \to U : x \mapsto \phi(t_0, x)$ ist differenzierbar und lokal invertierbar (mit inverser Abbildung $x \mapsto \phi(-t_0, x)$). Mit den beiden offensichtlich differenzierbaren Abbildungen $i : U \to \mathbb{R}\times U, x \mapsto (0, x)$ und $u : \mathbb{R}\times U, (t, x) \mapsto x$ gilt $\Phi = u \circ \alpha^{-1} \circ \gamma \circ \alpha \circ i$, daher ist Φ in einer Umgebung von x_0 differenzierbar. □

Fixpunkte von Φ entsprechen periodischen Orbits. Umgekehrt entsprechen periodische Orbits Fixpunkten von Φ, wenn man eine transversale Hyperebene gewählt hat.

Definition 17. Ein periodischer Orbit heißt stabil, wenn die Poincaré-Abbildung an der entsprechenden Stelle einen stabilen Fixpunkt hat.

Ein periodischer Orbit heißt hyperbolisch, wenn die Jacobi-Matrix der Poincaré-Abbildung an der entsprechenden Stelle Eigenwerte von Betrag ungleich 1 hat.

A priori hängt Stabilität bzw. Hyperbolizität von der Wahl der transversalen Hyperebene ab; man kann jedoch zeigen, daß die Eigenschaft unabhängig ist von der Wahl der transversalen Hyperebene.

Für stabile Orbits gilt, daß jeder Orbit mit Startwert in einer geeigneten offenen Umgebung sich diesem Orbit annähert. Hyperbolische Zykel mit EIgenwerten der Jacobi-Matrix der Poincaré-Abbildung mit Betrag kleiner 1 sind immer stabil.

Satz 22 (Poincaré-Bendixsohn)**.** *Es sei $n = 2$. Es sei $K \subset U$ eine kompakte Teilmenge von U, der keine Gleichgewichtspunkte enthält. Es sei $x : \mathbb{R}_+ \to K \subset U$ eine Lösungskurve, die K nicht verläßt. Dann existiert ein Zykel, an den sich x asymptotisch annähert.*

Proof. Man wähle für jeden Punkt aus K eine Gerade, die das Richtungsfeld transversal schneidet, und eine offene Umgebung sodaß jede darin enthaltene Lösungskurve die Gerade genau einmal schneidet. Wegen der Kompaktheit von K kann man diese Überdeckung durch offene Mengen durch eine endliche Teilüberdeckung ersetzen. Es muß nun zumindest eine dieser offenen Teilmengen (sagen wir V) geben, die von x für beliebig große t immer wieder geschnitten wird. Das darin enthaltene Geradenstück L wird dann ebenfalls immer wieder von x geschnitten. Das bedeutet, daß die Poincaré-Abbildung für alle Schnittpunkte des Orbits mit $L \cap V$ definiert ist.

Es sei x_0 ein Schnittpunkt von x und $L \cap V$. Wir betrachten die Folge $(x_i)_i$ definiert durch $x_{i+1} = \Phi(x_i)$. Wegen dem Jordan'schen Kurvensatz ist die Folge monoton steigend oder fallend. Da die Folge beschränkt ist, existiert der Grenzwert $\bar{x}$. Wegen der Stetigkeit des Flußes ist die Lösungskurve z mit Anfangspunkt $\bar{x}$ periodisch, und x nähert sich asymptotisch an z an. □

Falls endlich viele Gleichgewichtspunkte existieren, dann sind nur noch folgende weitere Fälle möglich:

- Der Orbit konvergiert gegen einen Gleichgewichtspunkt.
- Der Orbit nähert sich einer Menge an, die aus Gleichgewichtspunkten und "heteroklinen" oder "homoklinen" Orbits besteht (Definition unten).

Definition 18. Ein Orbit x heißt homoklin, wenn er auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, und wenn die Grenzwerte $\lim t \to -\infty x(t)$ und $\lim t \to \infty x(t)$ existieren und gleich sind. Ein Orbit x heißt heteroklin, wenn er auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, und wenn die Grenzwerte $\lim t \to -\infty x(t)$ und $\lim t \to \infty x(t)$ existieren und ungleich sind.

Die positiven und negativen Grenzwerte bei heteroklinen bzw. homoklinen Orbits sind natürlich Gleichgewichtspunkte (folgt aus der Stetigkeit des Vektorfelds).

Für Richtungsfelder im $\mathbb{R}^3$ gibt es keinen Satz analog zu Poincaré-Bendixsohn. Es gibt Beispiele von Fraktalen mit der Eigenschaft, daß sich jede Lösungskurve an diese asymptotisch annähert ("seltsame Attraktoren" wie etwa den Lorenz-Attraktor oder den Rössler-Attraktor). Das dynamische Verhalten auf diesen beiden Attraktoren ist "chaotisch", das heißt die periodischen Orbits liegen dicht im Attraktor, und für zwei offene Mengen U und V gibt es einen Orbit der beide schneidet (topologische Vermischung).

Literatur: [2, III.9,III.11,III.12]

18 Bifurkationstheorie

Wenn $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Richtungsfeld ist, und $o \in \mathbb{R}^n$ kein Gleichgewichtspunkt ist, dann ist der Fluß von F lokal equivalent zum Fluß eines konstanten Vektorfelds. Wenn nun das Richtungsfeld von einem oder mehreren reellen Parametern abhängt und diese Parameter Störungen unterliegen, dann ändert sich das lokale Verhalten qualitativ nicht, solange die Störung klein genug ist (solange nur das Richtungsfeld bei o nicht verschwindet).

Auch wenn o ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkten ist, ist das lokale Verhalten unabhängig von kleinen Störungen. Das besagt der folgende Satz.

Satz 23. *Es sei $o \in \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von U, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, welches 0 als inneren Punkt enthält, $F : U \times I \to \mathbb{R}^n$ ein Richtungsfeld, sodaß o ein hyperbolischer Gleichgewichtspunkt des Richtungsfeldes bei 0 ist. Dann gibt es ein Teilintervall $J \subset I$, sodaß für alle $\lambda \in J$ das Richtungsfeld bei λ wieder einen hyperbolischen Gleichgewichtspunkt besitzt. Dabei ist das qualitative Verhalten gleich dem des Gleichgewichtsounktes o im Richtungsfeldes bei 0.*

Proof. Für $\lambda \in I$ bezeichnen wir mit $F_\lambda : U \to \mathbb{R}^n$, $x \to F(x, \lambda)$ das Richtungsfeld bei λ. Die Funktion F_0 bildet den Punkt o auf den Nullpunkt ab und hat Jacobi-determinante ungleich 0 (da alle Eigenwerte Reilteil ungleich Null haben). Nach dem Satz über implizite Funktionen ist F_0 ein lokaler Isomorphismus von einer eventuell kleineren Umgebung $U' \subset U$ auf eine Umgebung V des Nullpunkts. Das Nicht-Verschwinden der Jacobi-determinante ist auch noch erfüllt für F_λ, falls λ nahe genug bei Null ist. Nach eventueller weiterer Verkleinerung der Umgebungen U' und V ist F_λ ein Isomorphismus von U'' und

V', und das inverse Bild des Nullpunkts ist der einzige Gleichgewichtspunkt von F_λ in U''. Die Stetigkeit der Eigenwerte liefert den Rest der Behauptung. $\square$

Im Gegensatz dazu können nichthyperbolische Gleichgewichtspunkte durch kleine Störungen den Typ ändern, verschwinden, oder in mehrere Gleichgewichtspunkte "aufspalten". In der Bifurkationstheorie werden die Möglichkeiten untersucht, wie nichthyperbolische Gleichgewichtspunkte durch kleine Störungen beeinflußt werden.

Sattelknoten-Bifurkation: $F_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda + x_1^2, x_2, \ldots, x_n)$. Für $\lambda < 0$ befinden sich in der Nähe von $(0, \ldots, 0)$ eine Quelle und ein Sattelpunkt (bzw. Senke falls $n = 1$), für $\lambda > 0$ gibt es keine Equilibrien.

transkritische Bifurkation: $n = 1$, $F(x, \lambda) = \lambda x + x^2$. Hier gibt es für $\lambda \neq 0$ zwei Equilibrien, eine Quelle und eine Senke, die beim Durchgang durch Null "den Typ vertauschen".

Graphische Darstellung von Bifurkationsdiagrammen im Fall $n = 1$: In der (x, λ)-Ebene werden für jedes λ die hyperbolischen Gleichgewichtspunkte durch Kurven gezeichnet, wobei Senken als durchgehende Kurven und Quellen strichliert dargestellt werden.

Definition 19. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Es sei $D \subset U$ eine kompakte Teilmenge von U mit glattem Rand. Ein stetig differenzierbares Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ heißt *strukturell stabil* auf D, wenn es zu jedem ein-parametrigem differenzierbarem Vektorfeld $\mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$, $(\lambda, x) \mapsto F_\lambda(x)$ ein $\epsilon > 0$ gibt, sodaß F auf D topologisch äquivalent ist zu F_λ für alle $\lambda \in (-\epsilon, \epsilon)$. Das heißt, es existiert ein Homöomorphimus von D nach D, der Orbits von F in Orbits von F_λ abbildet und die Pfeilrichtungen erhält.

Satz 24. *Im Fall $n = 2$ ist ein differenzierbares Vektorfeld genau dann stabil, wenn alle seine Gleichgewichtspunkte und Zyklern hyperbolisch sind, und wenn keine homoklinen oder heteroklinen Orbits existieren.*

Literatur: [2, I.2,III.13.1]

19 Variationsrechnung

Es sei $[a, b] \to \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall, $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $c, d \in \mathbb{R}$. Unter den Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, die die Randbedingung $f(a) = c, f(b) = d$ erfüllem sucht man eine, die das Integral $I(f) = \int_a^b L(f(x), f'(x))dx$ minimieren. Für Lösungen dieses *Variationsproblems* gibt der folgende Satz eine notwendige Bedingungung an.

Satz 25. *Es sei $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Lösung des obigen Variationsproblems. Es seien L_y und L_z die beiden partiellen Ableitungen der Funktion L. Dann erfüllt y die Euler-Lagrange-Gleichung*

$$L_y(y(x), y'(x)) = \frac{dL_z(y(x), y'(x))}{dx}.$$

Proof. Es sei $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $h(a) = h(b) = 0$. Dann hat die Funktion $\epsilon \to I(y + \epsilon h)$ bei $\epsilon = 0$ ein Minimum und erfüllt daher $I'(0) = 0$. Daher gilt

$$\begin{aligned} I'(0) &= \int_a^b [L_y(y(x), y'(x))h(x) + L_z(y(x), y'(x))h'(x)]dx \\ &= \int_a^b \left[L_y(y(x), y'(x)) - \frac{dL_z(y(x), y'(x))}{dx} \right] h(x)dx, \end{aligned}$$

wobei man verwendet daß der erste Summand in der partiellen Integration wegen $h(a) = h(b) = 0$ verschwindet. Weil das Integral für jede solche Funktion h gleich Null ist, muß der Faktor in der eckigen Klammer identisch verschwinden, das heißt die Euler-Lagrange-Gleichung ist erfüllt. □

Ein einfaches Beispiel ist das Problem der kürzesten Verbindung. Hier wählt man $L(y, z) = \sqrt{1 + z^2}$. Die Euler-Lagrange-Gleichung ist $y'' = 0$. Die Lösung ist natürlich die Gerade.

Ein weiteres Beispiel ist das Problem der schnellsten Verbindung (Brachystochrone) unter dem Einfluß der Schwerkraft: am Punkt (x, y) ist die Geschwindigkeit $\sqrt{2gy}$, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Man setzt $L(y, z) = \sqrt{\frac{1+z^2}{2gy}}$. Die Euler-Lagrange-Gleichung ist $1 + y'^2 + 2yy'' = 0$. Die Lösungskurve ist eine Zykloide, mit der Parameterdarstellung

$$x = r\cos(t) + rt + d, y = r\sin(t) + r.$$

Variationsprobleme mit einer Nebenbedingung der Art $J(f) = \int_a^b N(f(x), f'(x))dx = C$, wobei $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist und $C \in \mathbb{R}$ ist, können mit der Methode des Lagrange-Multiplikators behandelt werden. Sie führt auf die Gleichung

$$L_y(y(x), y'(x)) + \lambda N_y(y(x), y'(x)) = \frac{dL_z(y(x), y'(x))}{dx} + \lambda \frac{dN_z(y(x), y'(x))}{dx},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ so gewählt wird, daß die Nebenbedingung erfüllt ist.

Literatur

[1] M. Bronstein. *Symbolic Integration I: Transcendental Functions.* Springer, 2004.

[2] J. Hale and H. Koçak. *Dynamics and Bifurcations.* Springer, 1991.

[3] H. Heuser. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Teubner, 1995^3.