Übung 6 (6.12.2016)

Beispiel 3. Es sei $\lambda \in (-1, 1)$. Man finde für die Jordan-Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein positiv definites Skalarprodukt $\langle , \rangle_C : R^n \times \mathbb{R}^n$, sodaß $\langle Jv, Jv \rangle_C < \langle v, v \rangle_C$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

Lösung. Definiere

$$\langle v, w \rangle_C := \sum_{i=0}^{\infty} \langle J^i v, J^i w \rangle,$$

wobei $\langle , \rangle : R^n \times \mathbb{R}^n$ das übliche Skalarprodukt ist. Weil die Einträge von J^i geometrisch gegen 0 konvergieren, ist klar, daß die Reihe konvergiert. Ausserdem gilt

$$\langle Jv, Jv \rangle_C - \langle v, v \rangle_C = \sum_{i=1}^{\infty} \langle J^i v, J^i v \rangle - \sum_{i=0}^{\infty} \langle J^i v, J^i v \rangle = -\langle J^0 v, J^0 v \rangle = -\langle v, v \rangle,$$

und das ist offensichtlich negativ für alle $v \neq 0$.

Bemerkung. Die Lösung funktioniert nicht nur für Jordan-Blöcke. Man kann J durch eine Matrix ersetzen, deren Eigenwerte Betrag kleiner 1 haben, das reicht aus, daß J^i geometrisch gegen Null konvergiert. Und mehr verwendet die Lösung nicht.