Notiztitel 16.01.2017

$$\frac{\varphi'(t)^2}{2} + (\sin\varphi(t))^2 \, \frac{\psi'(t)^2}{2} - \cos(\varphi(t)) = c_1 \qquad (EE)$$

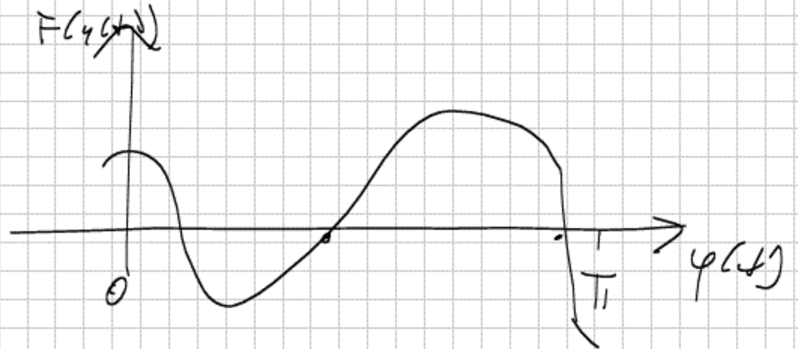
$$(\sin\varphi(t))^2 \, \psi'(t) = c_2 \qquad (EL2)$$

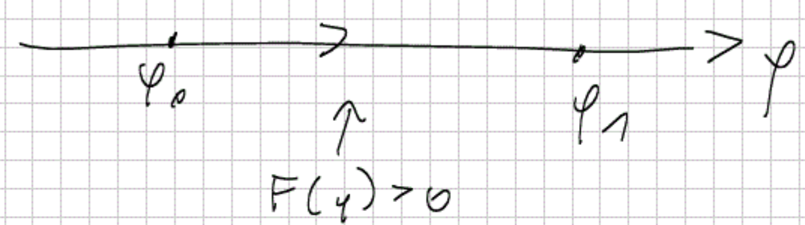
Elimination von ψ: $\psi'(t) = \dfrac{c_2}{(\sin\varphi(t))^2}$ → in EE einsetzen.

$$\frac{\varphi'(t)^2}{2} + \frac{c_2^2}{2(\sin\varphi(t))^2} - \cos(\varphi(t)) = c_1$$

$$\varphi'(t)^2 = -\frac{c_2^2}{(\sin\varphi(t))^2} + 2\cos(\varphi(t)) + 2c_1 = F(\varphi(t))$$

$$\varphi'(t) = \pm\sqrt{F(\varphi(t))}$$

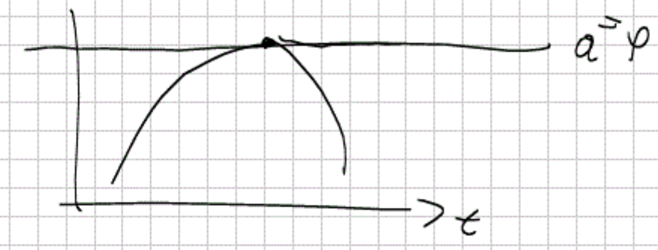




Nur wenn $F \geq 0$, existiert Lsg.

Appr. 1. Ordnung bei der Nullstelle: $F(\varphi) = a - \varphi$, a konst.

DG
$$\varphi'(t) = \pm\sqrt{a - \varphi(t)}$$
$$\varphi(t) = a - \frac{(t-c)^2}{4}$$



$\varphi : T \to [0, \pi]$ ist periodisch, pendelt zwischen 2 Werten hin und her.

$\dot\psi(t) = \sqrt{\frac{c_2}{\varphi^2(t)}}$ ist ebenfalls periodisch

ψ ist nicht periodisch, aber bei jeder Periode kommt Konstante dazu: $\psi(t + T_0) = P + \psi(t)$.

—

Weitere Erhaltungssätze

(1) Erhaltung des Impulses, wenn keine äußeren Kräfte auf ein System einwirken.

Da nach dem 3-ten Newtongesetz die Summe aller Kräfte Null ist, folgt, daß der Gesamtimpuls konstant ist.

Drehimpuls: Körper 1, ..., N, Massen $m_1, \dots, m_N$,

Position zum Zeitpunkt t: $\begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{pmatrix}$, $i = 1, \dots, N$,

Impuls-Erhaltung: $\sum_{i=1}^{N} m_i \underbrace{\begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{pmatrix}'}_{p_i(t)} = 0. \quad = \sum_{i=1}^{N} m_i p_i'(t)$

Drehimpuls: $$L = \sum_{i=1}^{N} m_i \, p_i(t) \times p_i'(t)$$

Satz: Wenn auf ein System keine äußeren Kräfte wirken oder nur Kräfte nur in Richtung des Nullpunkts (& innere Kräfte) wirken, und die inneren Kräfte zwischen 2 Körpern jeweils in die Richtung des anderen Körpers zeigen, dann bleibt der Drehimpuls konstant.

Beweis: Zu zeigen ist $L'(t) = 0$

$$L'(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \Big(\underbrace{p_i'(t) \times p_i'(t)}_{=0} + p_i(t) \times p_i''(t) \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \, p_i(t) \times p_i''(t)$$

$F = m_i p_i''(t)$ ist eine Kraft, die auf i wirkt

3tes Gesetz:

$-F = m_j p_j''(t)$

$$p_i(t) \times F + p_j(t) \times (-F)$$

$$= \big(p_i(t) - p_j(t)\big) \times F$$

Die beiden Vektoren sind l.a.

daher ist das Kreuzprodukt 0; der Satz ist bewiesen.

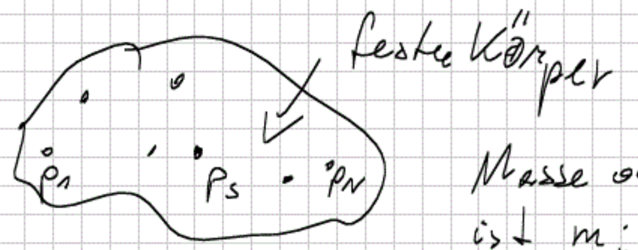
Anwendung. (1) Doppelpendel ohne Gravitation.

mit Gravitation bleibt
Drehimpuls nicht erhalten,
ohne: schon

(2) Bahn der Planeten um die Sonne.

Freie Rotation

Annahme: $\sum m_i p_i'(t) = 0$



Masse von p_i ist m_i

$R(t)$ Rotationsmatrix, die die Lage des Körpers zum Zeitpunkt t relativ zu $t=0$ beschreibt.

$R(0) = I_3$, $\quad R(t) \cdot R^T(t) = I_3 \quad \forall t.$

in geeigneten Koordinaten: $R(t) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$p_i(t) := R(t) \cdot p_i(0) \qquad i = 1, \ldots, N.$$

$$p_i'(t) = R'(t)\, p_i(0).$$

Lemma (Winkelgeschwindigkeit):
Für jedes t ist die Matrix $R(t)^{-1} \cdot R'(t)$
schiefsymmetrisch. (d.h. A ist schiefsym $\Longleftrightarrow A^T = -A$)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x & -y \\ -x & 0 & z \\ y & -z & 0 \end{pmatrix} \qquad A \cdot v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times v$$

Der Vektor zur schiefsym Matrix $R(t)^{-1} R'(t)$

heißt Winkelgeschwindigkeit

$w(t)$ ... Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t

$M_{w(t)}$ ... Matrix, $M_{w(t)} \cdot v = w(t) \times v$

$$R'(t) = R(t)\, M_{w(t)}.$$

$$L = \sum_{i=1}^{N} m_i\, p_i(t) \times p_i'(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, R(t)\, p_i(0) \times R(t) M_{w(t)}\, p_i(0)$$

$$= R(t) \sum_{i=1}^{N} m_i\, p_i(0) \times M_{w(t)}\, p_i(0)$$

$\left| R(a \times b) = Ra \times Rb \right|$

$$= R(t) \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i p_i(0) \times (w(t) \times p_i(0))}_{I \cdot w(t)} = R(t) \cdot I \cdot w(t) = L$$

I beschreibt die Abb.: $w \mapsto \sum_{i=1}^{N} m_i p_i(0) \times (w \times p_i(0))$

Man kann zeigen, daß I symmetrisch ist.

I heißt "Trägheitsmoment" des starren Körpers.

Bei Einführung von Koordinaten wird $I = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Differentialgleichung für $R: T \to SO(3,\mathbb{R})$ ..

Menge der orthogonalen Matrizen mit Determinante 1.

$$R'(t) = R(t)\cdot M_{w(t)}, \qquad R(t)\cdot I\cdot w(t) = L$$

Um eine DG für die Winkelgeschwindigkeit zu bekommen, leiten wir die zweite Gleichung ab:

$$R'(t)\cdot I\cdot w(t) + R(t)\, I\, w'(t) = 0$$

$$R(t)\cdot M_{w(t)}\cdot I\, w(t) + R(t)\, I\, w'(t) = 0 \qquad \Big|\ R(t)^{-1}\cdot\ \_$$

$$M_{w(t)} \cdot I \cdot w(t) + I \cdot w'(t) = 0$$

$$w'(t) = I^{-1} \cdot M_{w(t)} \cdot I \cdot w(t)$$

$$w(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad M_{w(t)} = \begin{pmatrix} 0 & x(t) & -z(t) \\ -x(t) & 0 & y(t) \\ z(t) & -y(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

F.:

$$x'(t) = \frac{b-c}{a}\, y(t)\, z(t)$$

$$y'(t) = \frac{c-a}{b}\, x(t)\, z(t)$$

$$z'(t) = \frac{a-b}{c}\, x(t)\, y(t)$$

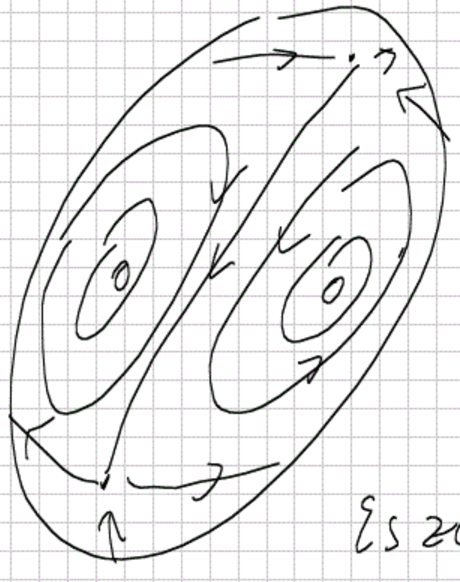
Ggl: $x = y = 0$

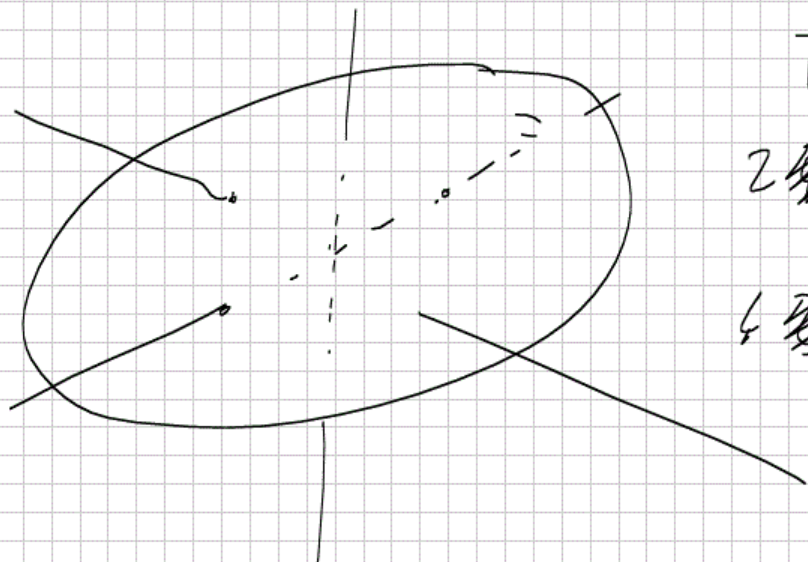
$x = z = 0$

$y = z = 0$

$G(x,y,z) = ax^2+by^2+cz^2$, $\partial_F(G) = 0$

Lsgen sind auf Ellipsoiden der Form $ax^2+by^2+cz^2 = \text{constant}$.





Typen der Bgl:

2 Sattelpunkte,

4 Zentren

Es zeigt sich, daß die Bahnen periodisch sind.