Variationsrechnung 2.

Notiztitel 10.01.2017

Satz: Es sei $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine 2mal stetige diffbare Funktion, $\frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}$ die partiellen Ableitungen.

Wenn $f: T \to \mathbb{R}$ die EL-Differentialgleichung

$$\frac{\partial L}{\partial y}(f(t), f'(t)) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(f(t), f'(t))\right)' = 0$$

erfüllt, dann erfüllt sie auch die Differentialgleichung

$$f'(t)\,\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(f(t), f'(t)) - L(f(t), f'(t)) = \text{const.}$$

BW: Berechne die Ableitung der linken Seite:

$$f''(t)\cdot \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot y}(\ldots)} + f'(t)\left(\frac{\partial L}{\partial \dot y}(\ldots)\right)' - \frac{\partial L}{\partial y}(\ldots)\, f'(t) - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot y}(\ldots) f''(t)}$$

$$= f'(t)\,\Big[\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot y}(\ldots)\right)' - \frac{\partial L}{\partial y}(\ldots)}_{EL}\Big] = f'(t)\cdot 0 = 0 \quad \square$$

—

Zurück zur schnellsten Verbindung zwischen 2 Punkten

$$L(y,\dot y) = \frac{\sqrt{1+\dot y^2}}{y^\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\alpha = 0$ (Gerade)

$\alpha = \frac{1}{2}$ (Schwerefeld)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot y}(f(t), f'(t))\cdot f'(t) - L(f(t), f'(t)) = \text{const.}$$

$$\left.\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}\;y^\alpha}\right|_{f(t),f'(t)} \cdot f'(t) - \frac{\sqrt{1+f'(t)^2}}{f(t)^\alpha} =$$

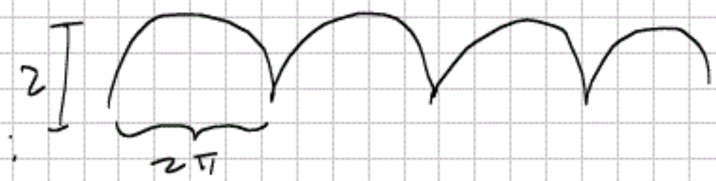
$$\frac{f'(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}\;f(t)^\alpha} \cdot f'(t) - \frac{\sqrt{1+f'(t)^2}}{f(t)^\alpha} = \text{const}$$

$$\frac{f'(t)^2 - \sqrt{1+f'(t)^2}^{\,2}}{\sqrt{1+f'(t)^2}\;f(t)^\alpha} = \text{const}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+f'(t)^2}\;f(t)^\alpha} = \text{const}. \quad \rightsquigarrow f'(t) = \text{Ausdruck in } f(t)$$

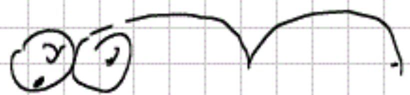
$\alpha = 0$: $f(t) = at + b$

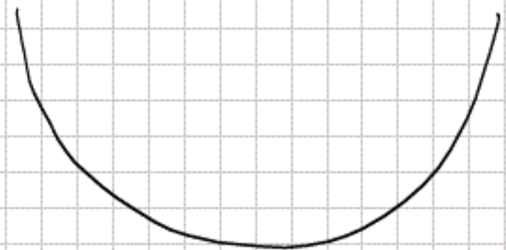
$\alpha = \frac{1}{2}$: Zykloide / Radkurve:



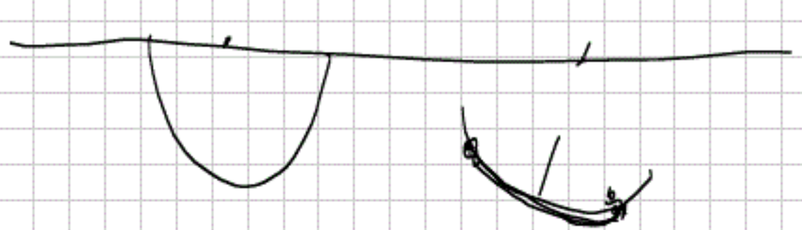
Parameterdarstellung $x(t) = rt + r\cos t$

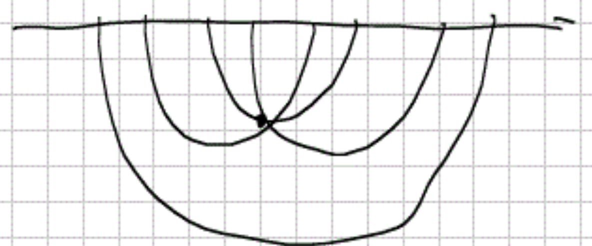
$y(t) = \sin(t) + 1$





$\alpha = 1$: Lösungen sind Kreise mit Mittelpunkt auf x-Achse:





Wh Analysis: Es seien $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig diff'bare Funktionen, p sei ein Extremwert von F unter allen Punkten q für die $G(q) = 0$ ist.

Dann ist $\operatorname{grad} F(p)$ proportional zu $\operatorname{grad} G(p)$

M.a.W.: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, sodaß $\operatorname{grad}(F + \lambda G)|_p = 0$

(oder $\operatorname{grad} G(p) = 0$).

Analog gilt für Variationsprobleme mit NB:

Geg $L, N : T \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad T = [a, b]$

NB: $\int_a^b N(t, f(t), f'(t))\,dt = 0$

$\int_a^b L(t, f(t), f'(t))\,dt \to$ Minimum!,

daß dies Minimum $y : T \to \mathbb{R}$

die EL-Gleichung

$$\frac{\partial (L + \lambda N)}{\partial y}(t, f(t), f'(t)) - \left(\frac{\partial (L + \lambda N)}{\partial \dot{y}}(t, f(t), f'(t)) \right)' = 0$$

erfüllt.

Beispiel: Isoperimetrisches Problem.

Zu optimieren: $\int_a^b f(t)\,dt = \text{Maximum}$,

NB $\int_a^b \left[\sqrt{1+f'(t)^2} - \frac{l}{b-a}\right] dt = 0$

$L(y,\dot y) = y$, $\quad N(y,\dot y) = \sqrt{1+\dot y^2} - \frac{l}{b-a}$

$\frac{\partial(L+\lambda N)}{\partial y} = 1$, $\quad \frac{\partial(L+\lambda N)}{\partial \dot y} = \frac{\dot y}{\sqrt{1+\dot y^2}}$

EL: $1 - \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{1+y'(t)^2}}\right)' = 0$

Satz der Energie-Erhaltung:

$\left.\frac{\partial(L+\lambda N)}{\partial \dot y}\right|_{f(t),f'(t)} \cdot f'(t) - L(f(t), f'(t)) = \text{constant}$

$$\frac{f'(t)^2}{\sqrt{1+f'(t)^2}} - f(t) - \sqrt{1+f'(t)^2} + \frac{l}{b-a} = \text{constant}$$

Lösung muß ... sein: Kreis.

Lagrange - Mechanik.

Newton-schen Axiome.

1. Axiom: Wenn auf einen Körper keine Kräfte wirken, dann bewegt er sich gleichförmig.

2. Axiom: Kraft = Masse × Beschleunigung.

3 Axiom: Kräfte treten paarweise mit jeweils umgekehrten Vorzeichen auf.

$p : T \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto$ Position zum Zeitpunkt t

$m \cdot p''(t) = -m \cdot \nabla U(p(t))$ U.. Potentialfunktion

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$U(x,y,z) = 9.81 \cdot z$.

$p''(t) + \nabla U(p(t)) = 0$ $(\nabla U = \operatorname{grad} U)$.

$L : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(p, \dot{p}) \longmapsto m \frac{\dot{p}^2}{2} - m U(p)$

kinetische Energie potentielle Energie .

$$\frac{\partial L}{\partial p}(..) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot p}\right)'(..) = 0 \qquad \text{(EL – gleichung)}$$

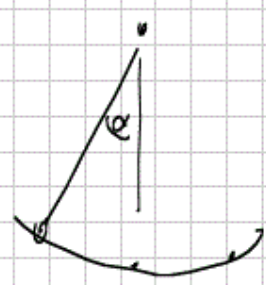
$$-m \operatorname{grad} U(p(t)) - \left(m \dot p \big|_{p(t), \dot p(t)}\right)' = 0$$

$$= -m (\operatorname{grad} U)(p(t)) - (m\, p'(t))' = 0 \qquad \Big| : m$$

$$-(\operatorname{grad} U)(p(t)) - p''(t) = 0 .$$

(B) Pendel:

$\alpha(t)$ .. Auslenkung zur Zeitpunkt t



$$L(\alpha, \dot\alpha) = \frac{m \cdot r^2 \cdot \dot\alpha^2}{2} + \cos(\alpha) \cdot r \cdot m \cdot g$$

$m = v = g = 1$, $L(\alpha, \dot\alpha) = \frac{\dot\alpha^2}{2} + \cos\alpha$.

EL: $\frac{\partial L}{\partial \alpha}(\varphi(t), \varphi'(t)) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha}(\varphi(t), \varphi'(t))\right)' = 0$ $t \to \varphi(t)$

$$-\sin\varphi(t) - \varphi''(t) = 0$$

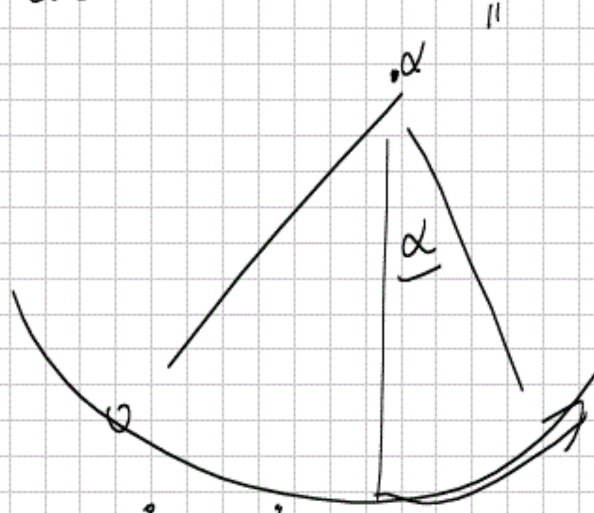
EE: $\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha}(\varphi(t), \varphi'(t)) \cdot \varphi'(t) - L(\varphi(t), \varphi'(t)) = \text{const}$.

$$\varphi'(t)^2 - \frac{\varphi'(t)^2}{2} - \cos(\varphi(t)) = 0$$

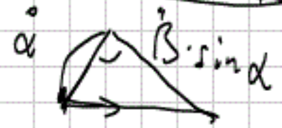
$$\frac{\varphi'(t)^2}{2} - \cos(\varphi(t)) = 0$$

Beispiel 2 Kugelpendel.

Koordinaten:



Geschw. $= \sqrt{\dot\alpha^2 + \sin^2\alpha \cdot \dot\beta^2}$



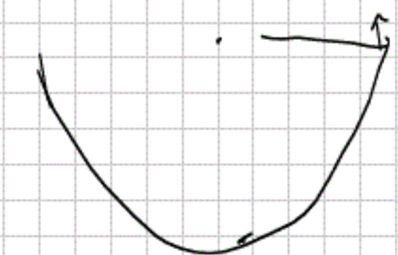
$\alpha \triangleq$ Breitengrad,

$\beta \triangleq$ Längengrad

Pot. Energie $-\cos\alpha$

$L(\alpha, \dot\alpha, \beta, \dot\beta)$

$$= \frac{\dot\alpha^2}{2} + \sin^2\alpha \cdot \frac{\dot\beta^2}{2} + \cos\alpha$$



$$t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$$
$$\varphi(t) \text{ is } \alpha, \quad \psi(t) = \beta$$

(1) $\frac{\partial L}{\partial \alpha}(\varphi(t), \varphi'(t), \psi(t), \psi'(t)) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha}(\dots)\right)' = 0$

(2) $\frac{\partial L}{\partial \beta}(\dots) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot\beta}(\dots)\right)' = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial \dot\beta}(\dots) = \text{constant}$

$*$ $\sin^2(\varphi(t)) \cdot \psi'(t) = \text{constant}.$

[?] ntt (1) EE: $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha}\dot\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot\beta}\dot\beta - L\right)\Big|_{\varphi(t), \dots)} = \text{constant}.$

$$\dot{\alpha}^2 + \sin^2\alpha \cdot \dot{\beta}^2 - \left(\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \sin^2\alpha \, \frac{\dot{\beta}^2}{2} + \cos\alpha\right)\Big|_{(\ldots)} = \text{const}$$

$$\left(\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \sin^2\alpha \cdot \frac{\dot{\beta}^2}{2} - \cos\alpha\right)\Big|_{\ldots} = \text{const.}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\varphi'(t)^2}{2} + (\sin\varphi(t))^2 \, \frac{\varphi'(t)^2}{2} - \cos(\varphi(t)) = \text{const} \\ (\sin\varphi(t))^2 \, \varphi'(t) = \text{constant}\end{gathered}}$$

$*$