Variationsrechnung

Notiztitel 09.01.2017

Gegeben $T = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, Variationsproblem:

$L: T \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ stetig, $k+1$-mal differenzierbar.

$L: (t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, \overset{k\text{-Punkte}}{y}) \mapsto L(\ldots)$

$\frac{\partial L}{\partial t}$ sei die partielle Ableitung nach der ersten Variable, $= \partial_t L$

$\frac{\partial L}{\partial y}$ partielle Abl nach der zweiten usw. $\partial_y L$

$\partial_{\dot{y}} L$ usw.

in $\frac{\partial}{\partial t}$ ist t keine Variable, sondern Teil eines Diff-operators.

13 $f(x,y) = x^2 + y^3$ $\qquad$ $\partial_x f : (x,y) \mapsto 2x$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(y,x) = 2y$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial x}(y^2 + x^3) = 3x^2}$$

$\square$

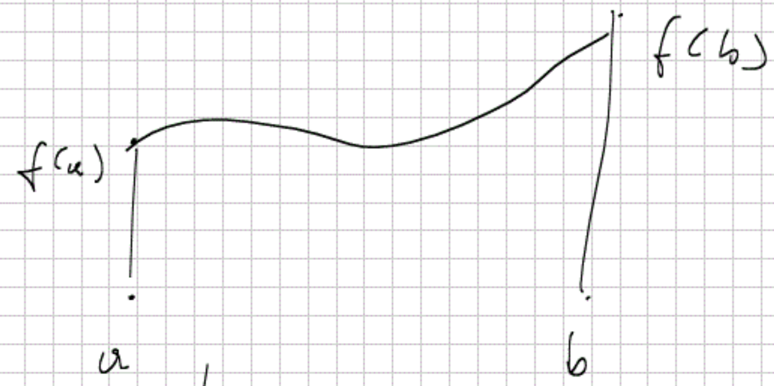
Gesucht $f : T \to \mathbb{R}$ $k+1$-mal stetig diffbar, sodass
$$\int_a^b L(t, f(t), f'(t), \ldots, f^{(k)}(t))\,dt$$
ein Minimum annimmt.

Nebenbedingung. $f(a)$, $f(b)$ gegeben.

$f'(a)$ bis $f^{(k-1)}(a)$, $f'(b), \ldots, f^{(k-1)}(b)$ gegeben.

Beispiele für Variationsprobleme:

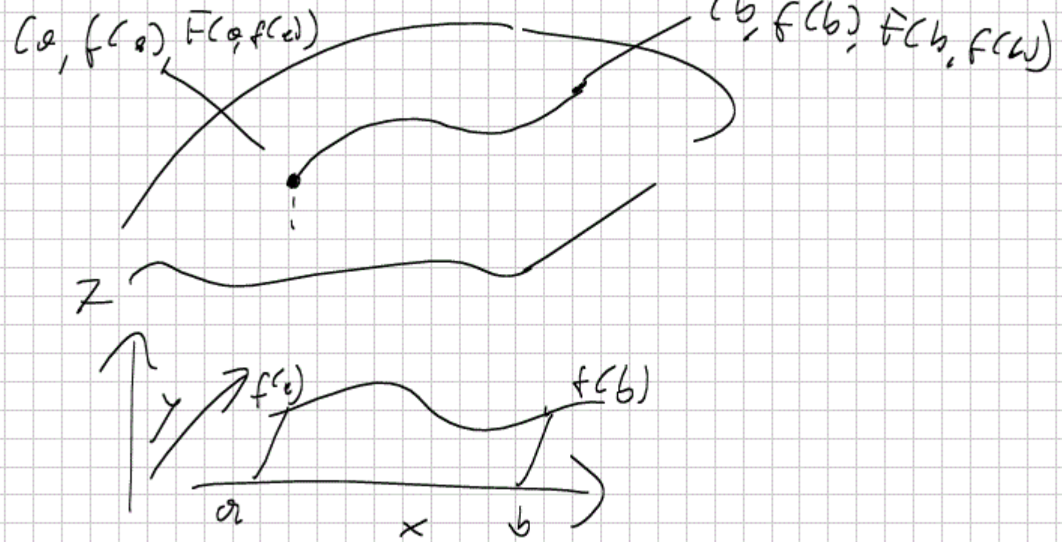
- Kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten.



$$\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt = \text{Minimum!}$$

- Kürzeste Verbindung von 2 Punkten auf einer Fläche $z = F(x,y)$

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial x}(t,f(t))+\frac{\partial F}{\partial y}(t,f(t))\cdot f'(t)\right)^2}\,dt \to \text{Minimum!}$$



B: Fläche ist eine Kugel;
kürzeste Verbindung liegt auf einem Großkreis
(= Kreis mit Mittelpunkt im Mittelpunkt der Kugel).

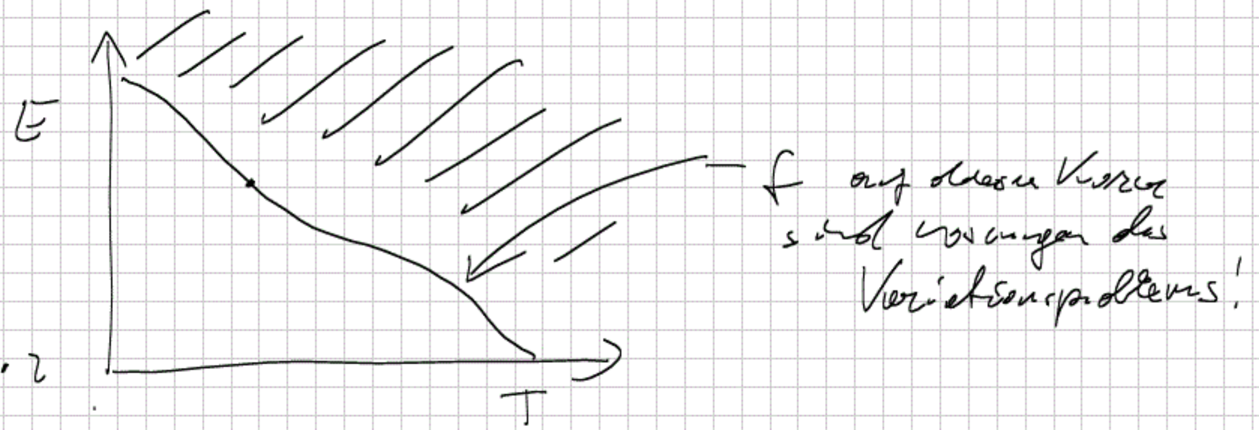
Landung einer Rakete:

$[a,b]$ Zeitintervall, $f(t)$ .. Höhe zur Zeit t.

Gegeben: $f(a)$, (>0), $f(b)$ $(=0)$, $f'(a)$, $f'(b)$.

Energieverbrauch pro Zeit: $\sim f''(t)^2$

$$\int_a^b f''(t)^2 \, dt \longrightarrow \text{Minimum!}$$



$\cancel{L(\ddot{y})} = \ddot{y}^2$

$L(t, y, \ddot{y}) = \ddot{y}^2$

Variationsprobleme mit Nebenbedingung:

$L : T \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$

$N : T \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ $\Big)$ k+1 mal stetig differenzierbar.

Gesucht $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,

sodaß $\int_a^b L(t, f(t), f'(t), \dots, f^{(k)}(t))\,dt$ = Minimum

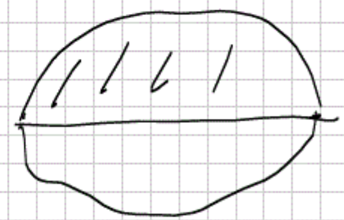
unter der NB $\int_a^b N(t, f(t), f'(t), \dots, f^{(k)}(t))\,dt = 0$.

Beispiele für Variationsprobleme mit Nebenbedingungen:

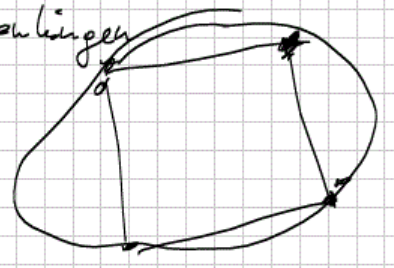
Gesucht: Kurve mit fixer Bogenlänge, eingeschl. Fläche ist maximal.

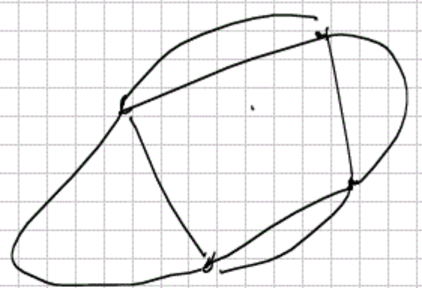
$$N: \int_a^b \left(\sqrt{1+f'(t)^2} - \frac{L}{(b-a)}\right) dt = 0$$

$$L \quad \int_a^b f(t)\,dt = \text{Maximum!}$$

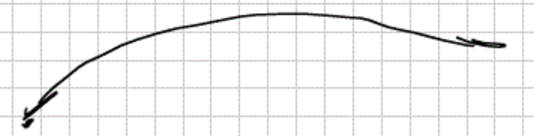


Es reicht zu zeigen daß mit vorg. Seitenlängen ein Viereck genau dann maximale Fläche hat, wenn die 4 Punkte auf einem Kreis liegen.

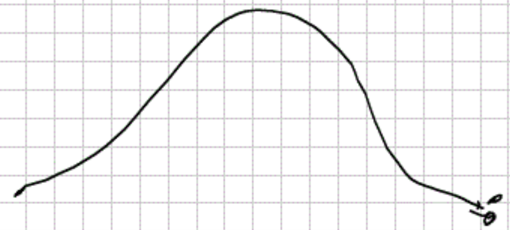




Elastischer Stab in der Ebene



elastische Energie =



$$\int_a^b \frac{f''(t)^2}{\sqrt{1+f'(t)^2}^5}\, dt = \text{Minimum}!$$

$(= \int \kappa^2\, ds)$

$$\int_a^b \left(\sqrt{1+f'(t)^2} - \frac{L}{(b-a)} \right) dt = 0$$ Nebenbedingung.

Die Euler-Lagrange-Differentialgleichung:

Satz: Wenn f eine Lösung des Variationsproblems

$$\int_a^b L(t, f(t), \ldots, f^{(k)}(t))\, dt \to 0$$

ist, dann erfüllt f die Differentialgleichung für f:

$$\frac{\partial L}{\partial y}(t, f(t), \ldots, f^{(k)}(t)) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(t, f(t), \ldots, f^{(k)}(t))\right)' + \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{y}}(t, \ldots, f^{(k)}(t))\right)''$$

$$- + \ldots = 0.$$

(Differentialgleichung $k+1$-Ordnung für f.

Herleitung für $k = 1$:

Es sei f eine Lösung.

Es sei $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig diffbare Fkt mit $h(a) = h(b) = 0$.

Werten $\int_a^b L(t, y(t), y'(t))\, dt$ für $y = f + \varepsilon \cdot h$ aus.

$$I(\varepsilon) := \int_a^b L(t, f(t) + \varepsilon h(t), f'(t) + \varepsilon h'(t))\, dt \qquad I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

I ist differenzierbar und hat bei $\varepsilon = 0$ ein Minimum $\Rightarrow I'(0) = 0$.

Berechnung von $I'(0)$:

$$I'(0) = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} \left(L(t, f(t) + \varepsilon h(t), f'(t) + \varepsilon h'(t)) \right)\Big|_{\varepsilon=0} dt \quad =$$

$$= \int_a^b \left(h(t) \cdot \frac{\partial L}{\partial y}(t, f(t), f'(t)) + h'(t) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(t, f(t), f'(t)) \right) dt =$$

$$= \int_a^b h(t) \cdot \frac{\partial L}{\partial y}(t, f(t), f'(t))\, dt + \int_a^b h'(t) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(t, f(t), f'(t))\, dt$$

$$= \int_a^b h(t) \frac{\partial L}{\partial y}(t, f(t), f'(t))\, dt + \cancel{h(b) \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(b, f(b), f'(b))} -$$

$$\cancel{- h(a) \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(a, f(a), f'(a))} - \int_a^b h(t) \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(t, f(t), f'(t)) \right)' dt$$

$$(h(a) = h(b) = 0)$$

$$=$$

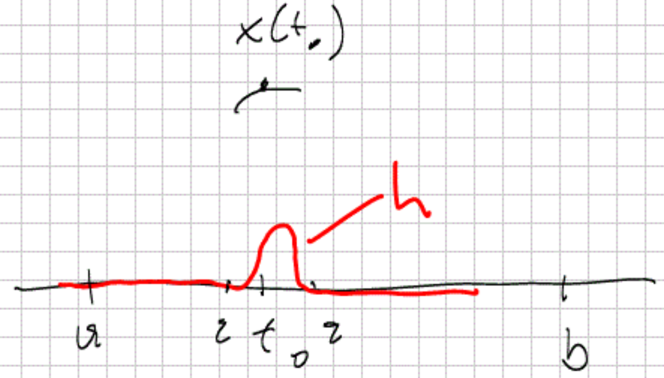
$$(*) \quad \int_a^b h(t) \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial y}(t, f(t), f'(t)) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(t, f(t), f'(t)) \right)'}_{x(t)} \right) dt = 0$$

Lemma: Es sei $x : T \to \mathbb{R}$ stetig, sodaß für alle $h : T \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b) = 0$ gilt:

$$\int_a^b h(t)\, x(t)\, dt = 0.$$

Dann ist $x(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b]$.

BW: Angenommen indirekt: $x(t) \neq 0$ OBdA $x(t_0) > 0$, $t_0 \in [a, b]$, $t_0 \in (a, b)$.



x ist in $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ positiv.

Wählen h als eine Beulenfunktion mit $h=0$ außerhalb von $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$, und $h(t_0)>0$.

$$\int_a^b x(t)\,h(t)\,dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} x(t)\,h(t)\,dt > 0$$

$\lightning$.

In $*$ ist

$$\frac{\partial L}{\partial y}(t, f(t), f'(t)) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(t, f(t), f'(t))\right)' = 0. \quad \square.$$

B Raketenlandung:

$$L(t, y, \dot y, \ddot y) = \ddot y^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(t, f(t), f'(t), f''(t)) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot y}(t, f(t), f'(t), f''(t))\right)' + \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot y}(t, \ldots)\right)'' = 0$$

$$\left(2\ddot y \big|_{(t, f(t), f'(t), f''(t))}\right)'' = 0$$

$$\left(2 f''(t)\right)'' = 2 f''''(t) = 0$$

$\rightarrow$ f ist von der Form

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$a_0, \ldots a_3$ werden durch $f(a)$, $f'(a)$, $f(b)$, $f'(b)$ bestimmt.

Beispiel 2: kürzeste Verbindung von P nach Q, Geschwindigkeit $\sim y^{\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$. ($\alpha = 0 \rightsquigarrow$ Gerade)

$\alpha = \frac{1}{2}$ freier Fall

Freier Fall: $g \cdot y \cdot m = m v^2$, $v \sim y^{\frac{1}{2}}$ ~

Um Zeit zu optimieren, haben wir das Funktional:

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1+f'(t)^2}}{f(t)^{\alpha}}\, dt \qquad . \qquad L(t, y, \dot y) = \frac{\sqrt{1+\dot y^2}}{y^{\alpha}}. \quad (y \neq 0).$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = y^{-\alpha-1} \cdot \sqrt{1+\dot y^2}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot y} = \frac{\dot y}{\sqrt{1+\dot y^2}\, y^{\alpha}}$$

Brauchen $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(t, f(t), f'(t))\right)' = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}\, \partial t}(t, f(t), f'(t))$

$$+ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}\, \partial y}(t, f(t), f'(t)) \cdot f'(t) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}\, \partial \dot{y}}(t, f(t), f'(t))\, f''(t)$$

$\longrightarrow$ gibt Diffgleichung 2ter Ordnung für f.

$\longrightarrow$ nach längerer Rechnung kommt man auf die DG

$$y''(t)\, y(t) + \alpha(1 + y'(t)^2) = 0.$$

Satz: Wenn L nicht von t abhängt (d.h. $L : (y, \dot{y}) \mapsto L(y, \dot{y})$), dann lässt sich die EL-Bedingung vereinfachen zu:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(y(t), \dot{y}(t)) \cdot \dot{y}(t) - L(y(t), \dot{y}(t)) = C,$$

mit $C \in \mathbb{R}$ konstant.

