Notiztitel 13.12.2016

Wie findet man einen "sicheren Bereich", d.h. eine abgeschlossene Menge K, beschränkt, sodaß

$\forall x \in K,\ t > 0:\ \varphi(t,x) \in \mathring{K}$ (im Inneren von K).

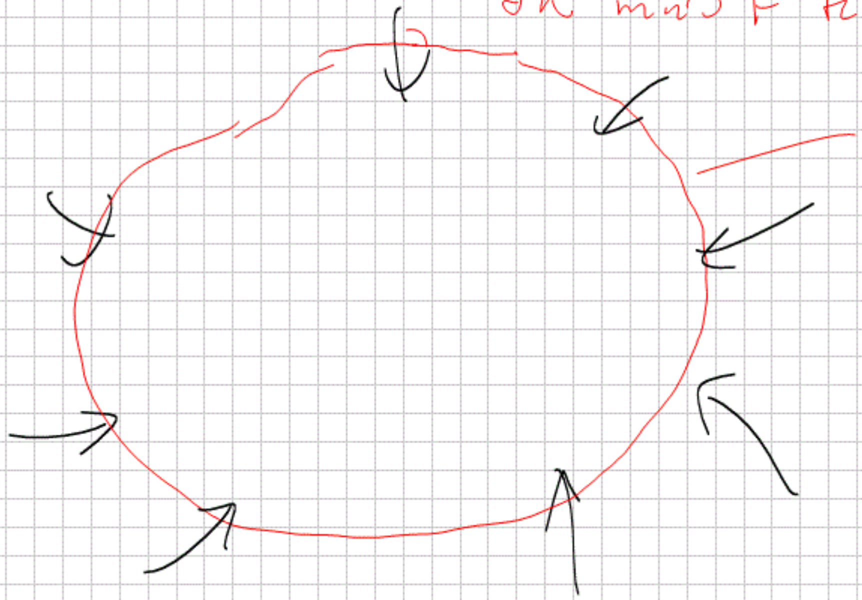
(muß nicht existieren). "trapping region"

Methode 1: Sei $x_0 \in U$ eine hyperbolische Senke.

Dann existiert L von der Form $x \mapsto \langle x-x_0, x-x_0\rangle_c$, wobei $\langle\,,\,\rangle_c$ ein positiv definites symmetrisches Skalarprodukt ist.

Methode 2: geometrisch.

∂K muß F transversal kreuzen



Polygonzug, oder Zusammenstückeln aus Kreisbögen etc.

Methode 3: Verallgemeinerung von Liapunov.

Def (Richtungsableitung):

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $F: U \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbares Vf

Es sei $G: U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar

Dann ist die Richtungsableitung von G nach F definiert als

$$\partial_F(G): U \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{\partial G}{\partial x_1} \cdot F_1\right)(x_1 \dots x_n) + \dots \left(\frac{\partial G}{\partial x_n} \cdot F_n\right)(x_1 \dots x_n)$$

B: $n = 2$, $F: (x, y) \mapsto (-x, x+2)$

$$G: (x, y) \mapsto x^3 + y^3$$

$$\partial_F G(x, y) = 3x^2 \cdot (-x) + 3y^2 \cdot (x+2) = \dots$$

Proposition: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $F: U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.
Es sei $G: U \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, sodaß
$J := \{ x \in U \mid \partial_F G(x) \geq 0 \}$ kompakt ist
(d.h. beschränkt).

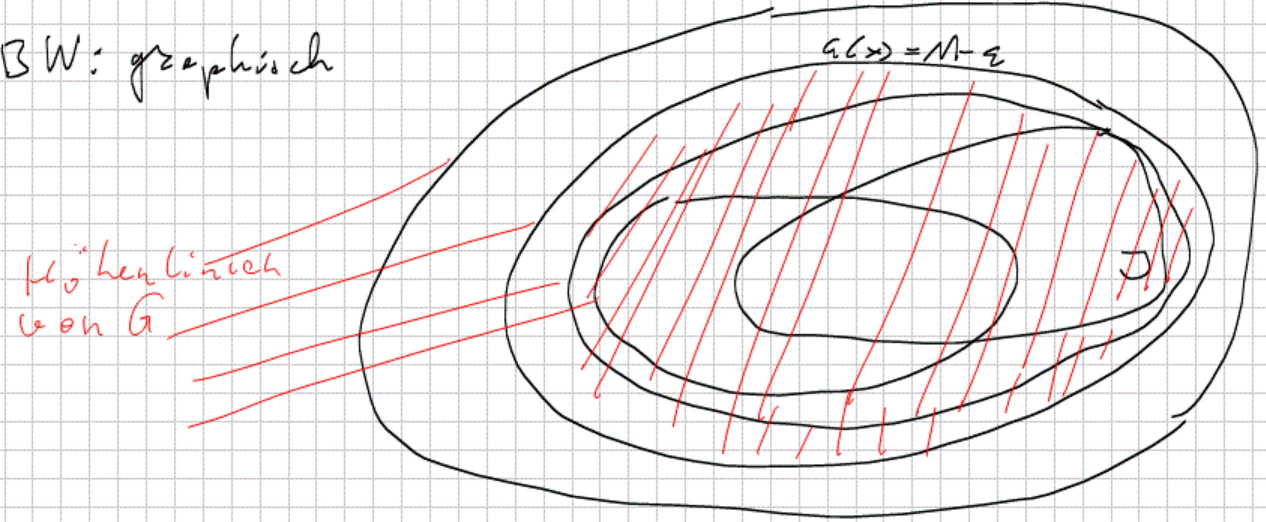
Es sei $M := \sup_{x \in J} G(x)$ $\left(= \max_{x \in J} G(x), \text{ da } J \text{ kompakt} \right)$.

Es sei $\varepsilon > 0$.

Dann ist $K := \{ x \in U \mid G(x) \le M - \varepsilon \}$

ein sicherer Bereich.

BW: graphisch



$\forall$ Lösungen $f: T \to U$ gilt

$\frac{d}{dt} G(f(t)) = \partial_f G(f(t)) < 0$ wenn $f(t) \notin J$.

Abschließend zu 2D - Systemen.

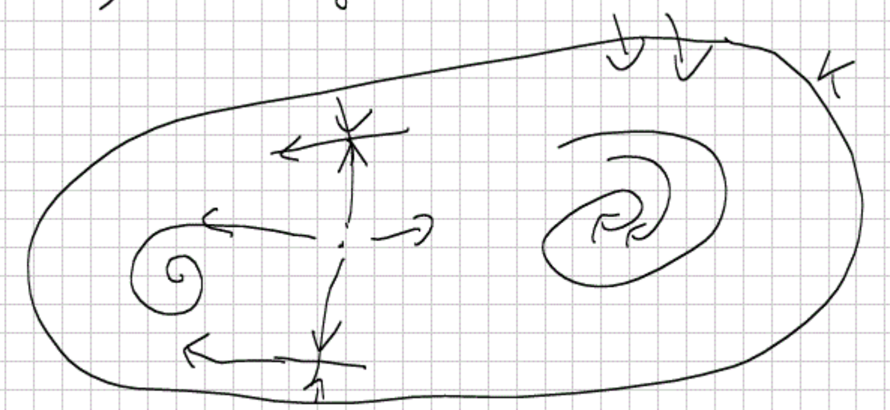
hyperbolische EqL sind strukturellstabil.

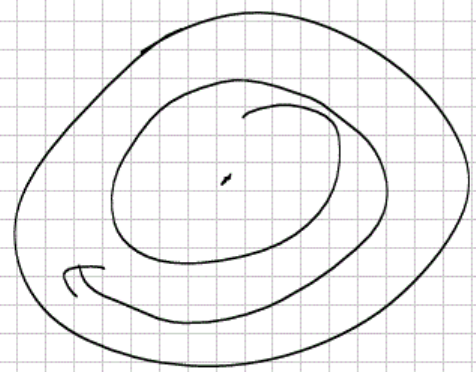
kleine Orbits sind strukturell nicht stabil.

Klein? Woher kommt das Wort?

Satz (ohne Beweis): Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge; wir betrachten alle Richtungsfelder (evtl. parameterabhängig), für die K ein sicherer Bereich ist. Dann ist F genau dann strukturell stabil (d.h. wenn F_λ stetig in λ, $F_0 = F$, ist für $\lambda < \varepsilon$ F_λ topologisch äquivalent zu $F = F_0$), wenn gilt:

(1) alle Egl sind hyperbolisch
(2) alle Zyklen sind hyperbolisch
(3) es gibt keine kleinen Orbits.





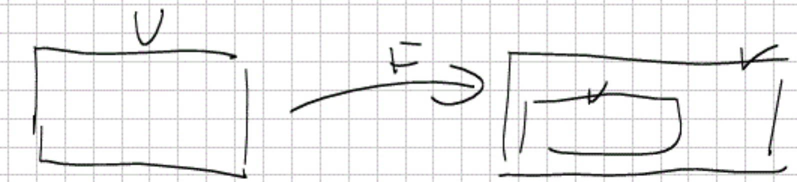
Höher-dimensionale Systeme:

Eigenschaften der Poincaré-Abb in beliebiger Dimension:

- Φ ist injektiv, auf dem Bildbereich ist die Inverse differenzierbar.
- $J\Phi$ ist positiv.

Umgekehrte: Gegeben $U \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Mengen, $F: U \to V$ stetig differbar, injektiv, Jacobi-Ableitung. Kann man ein Rf in $\mathbb{R}^{n+1}$ finden, sodaß F die Poincaré-Abb ist?

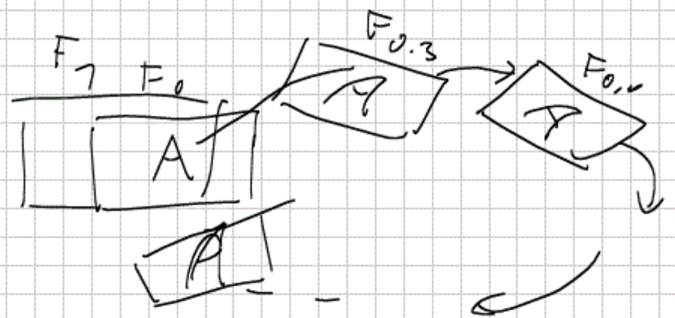
Kochrezept:



$\leadsto$ Schar von Funktion $F_\lambda : V \to V$

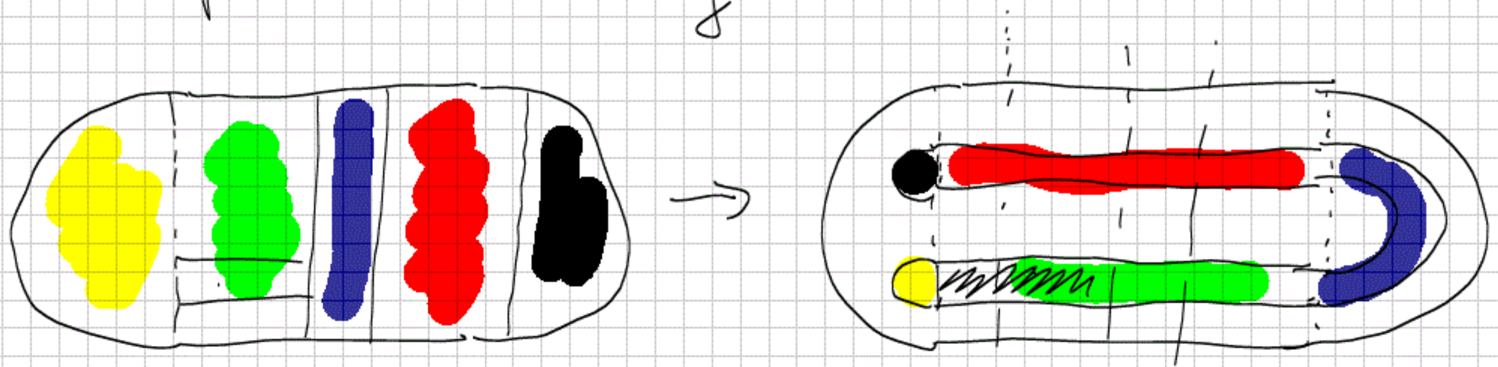
$F_0 = id_U$

$F_1 = F$



Dadurch verfolgen der Punkte erhält man Bahnen $\leadsto$ Rf.

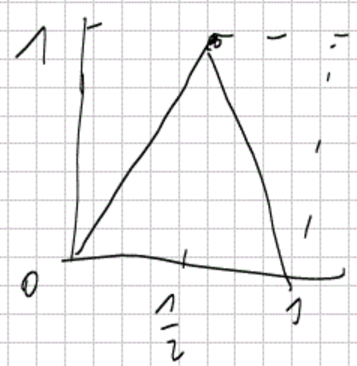
Die Hufeisen-Abbildung

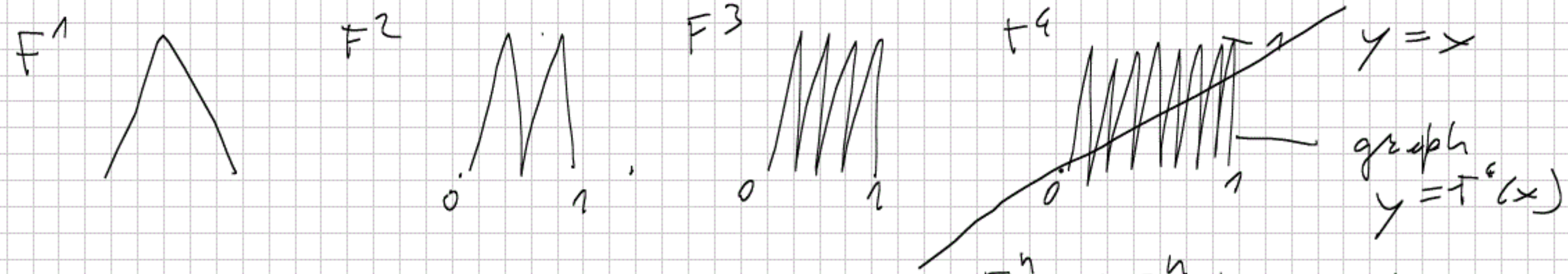


Die Abbildung hat Zyklen von jeder beliebigen Periode.

1D-Variante:

$F: [0,1] \longrightarrow [0,1]$





F^n hat 2^n Fixpunkte.

$\rightsquigarrow$ F hat Zyklen beliebiger Länge.

Ableitung ist immer $\pm 2^n$ $\longrightarrow$ alle instabil

Zyklen liegen dicht auf $[0,1]$.

Wenn $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein VF ist mit der Hufeisen-Abb. als Poincaré-Abb., dann hat dieses VF ähnlich chaotisches Verhalten:

- Zyklen beliebiger Länge (k-Zyklus von Φ entspricht einem Zykel (per. orbit), der k mal so lange braucht wie Zyklen in der Nähe