Asymptotisch stabile Zyklen

Notiztitel 12.12.2016

Def: ein Zyklus heißt hyperbolisch, wenn er einem hyperbolischen Fixpunkt der Poincaré-Abbildung entspricht.

Satz: Hyperbolische Zyklen sind strukturell stabil.

dh: stabil unter Änderung eines Parameters λ in der DG

BW: Poincaré-Abbildung Φ ist differenzierbar in λ, wenn Rf von λ abhängt.

Sei $F_\lambda : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, ein parameterabh. Richtungsfeld,

Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperebene, die transversal zu F_0 in U.

für λ klein genug ist H transversal zu F_λ

Richtungsfeld $G : U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

$$(x, \lambda) \longmapsto (F_\lambda(x), 0).$$

$H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist dann transversal zu G.

$$\Phi_G : H \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow H \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$(x, \lambda) \longmapsto (\phi_{F_\lambda}(x), \lambda)$$

Φ_G ist diffbar $\rightsquigarrow$ Φ_{F_λ} differenzierbar in λ. $\square$

(B) Bifurkation, bei der ein Grenzzyklus entsteht.
(= asymptotisch stabiler Zyklus)

$$F_\lambda(x, y) = (-y - x(x^2 + y^2) - \lambda x,\ x - y(x^2 + y^2) - \lambda y)$$

$$F_0(x, y) = (-y - x(x^2 + y^2),\ x - y(x^2 + y^2))$$

$(0,0)$ ist Egl für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$J(F_\lambda)|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$ linearer Anteil: $(x,y) \mapsto (-y-\lambda x, x-\lambda y)$

char. Polynom ist $(x-\lambda)^2+1$ — Für $\lambda=0$ EW auf der imaginären Achse

$L(x,y) := x^2+y^2$ ist Ljapunov für $\lambda=0$:

$$\frac{dL(x(t),y(t))}{dt} = 2x(t)\left(-y(t)-x(t)(x(t)^2+y(t)^2)\right) + 2y(t)\left(x(t)-y(t)(x(t)^2+y(t)^2)\right) =$$

$$= -2x(t)^2(x(t)^2+y(t)^2) - 2y(t)^2(x(t)^2+y(t)^2)$$

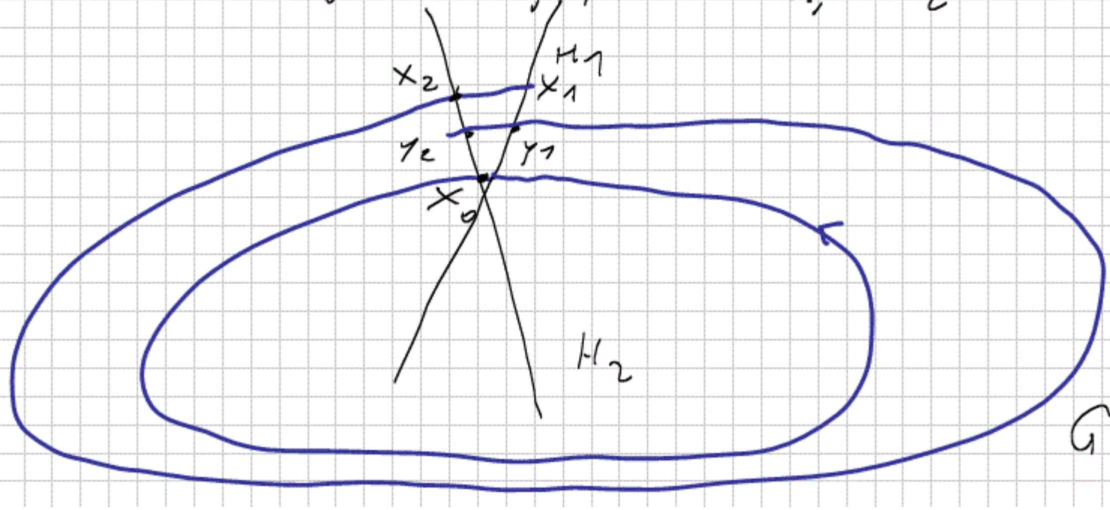
$$= -2(x(t)^2+y(t)^2)^2 < 0 \quad \text{für } x(t),y(t) \neq 0,0$$

$(0,0)$ ist asymptotisch stabiler Fp.

Bemerkung: Φ (die Poincare-Abb) hängt von der Wahl der Hyperebene H ab.

Prop: Die Eigenwerte der Jacobi-Matrix der Poincare-Abb. bei einem Fixpunkt hängen nicht von der Wahl der Hyperebene ab.

BW: Sei x_0 ein $E_g C$, H_1, H_2 transversale Hyperebenen



$\Phi_1 : H_1 \cap U \to H_1 \cap U$

$x_1 \mapsto y_1$

$\Phi_2 : H_2 \cap U \to H_2 \cap U$

$x_2 \mapsto y_2$

$G : H_1 \cap U \to H_2 \cap U$:

$x_1 \mapsto x_2$, $y_1 \mapsto y_2$

G kann aus φ (Fluß) konstruiert werden,
ist differenzierbar und G^{-1} ist wieder diffbar.

$$\begin{array}{ccc} H_1 \cap V & \xrightarrow{G} & H_2 \cap V \\ \downarrow \Phi_1 & & \downarrow \Phi_2 \\ H_1 \cap V & \xrightarrow{G} & H_2 \cap V \end{array}$$

$$\Phi_2 \circ G = G \circ \Phi_1$$

$$J(\Phi_2) \cdot J(G) = J(G) \cdot J(\Phi_1)$$

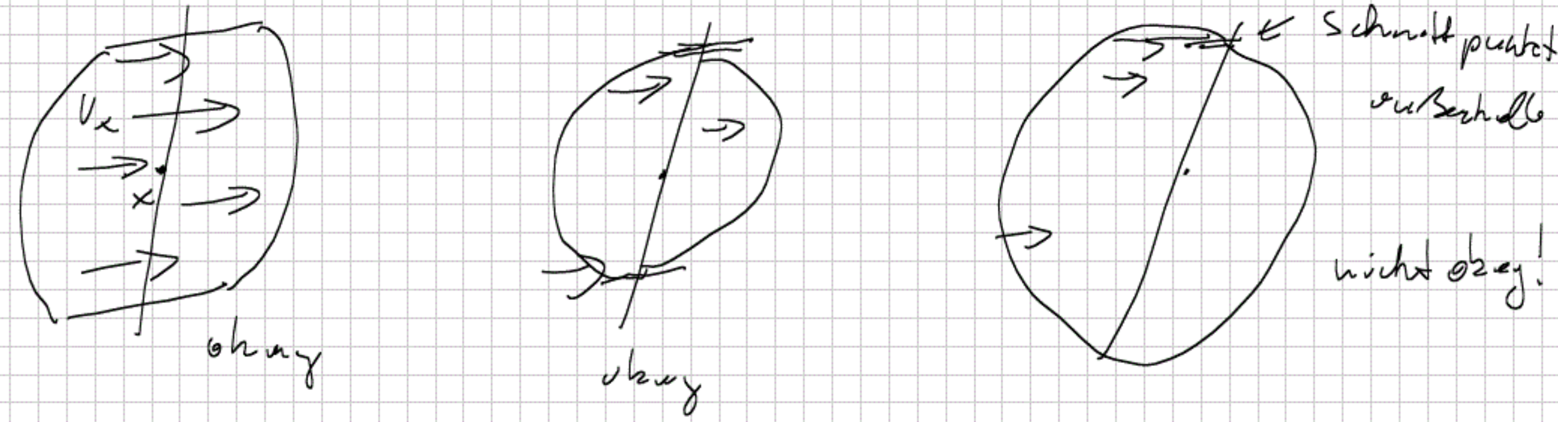
$$J(G)^{-1} J(\Phi_2) J(G) = J(\Phi_1)$$

$J(\Phi_1)$ und $J(\Phi_2)$ sind ähnliche Matrizen $\square$

Satz von Poincaré-Bendixsohn:
Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $F: U \to \mathbb{R}^2$ stetig diffbares VF.

Es sei $K \subseteq U$ kompakt, die keine Egl enthält.
Es sei $f: T \to U$ eine Lösung der Diff-gleichung
$\forall t: f'(t) = F(f(t))$ mit maximalem Def-Bereich $T \subseteq \mathbb{R}$.
Dann gilt eine der folgenden:
(a) $\exists t_0 > 0$; $f(t_0)$ liegt am Rand von K.
(b) es existiert ein asymptotisch stabiler Zyklus, dem sich f annähert.

BW K wird mit offenen Teilmengen überdeckt.
Sei $x \in K$
Es existiert eine offene Umgebung U_x von x
sodaß eine transversale Gerade existiert, die jeden Orbit in U_x genau $1\times$ schneidet · innerhalb von U_x. & U_x beschränkt,



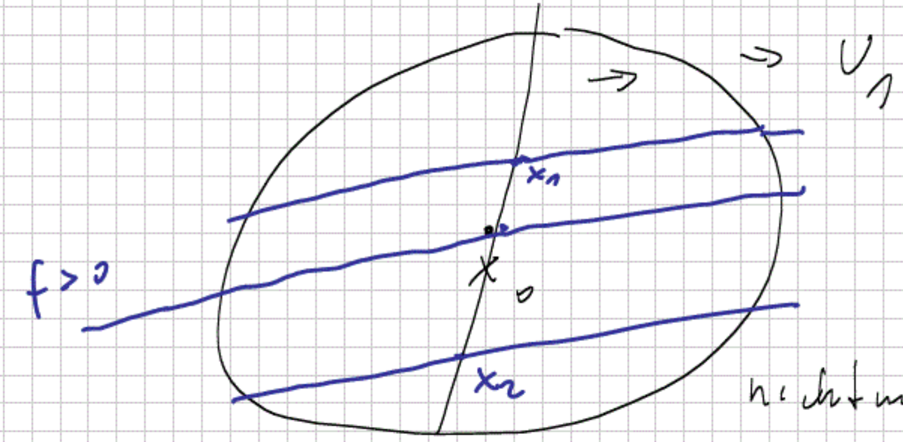
K wird durch diese U_x überdeckt.

$K = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ $\quad$ $U_1, \dots, U_n$ solche Mengen.

$\{f(t) \mid t > 0\} = f_{>0}$

Es gibt ein U_1, das unendlich oft von $f_{>0}$ getroffen wird.

Die Poincaré-Abb. ist für dieses U_1 definiert in einer Umgebung des ersten Schnittpunktes x_0 von G_1 mit $f_{>0}$.



$\Phi(x_0) =: x_1$

$\Phi(x_1) =: x_2$

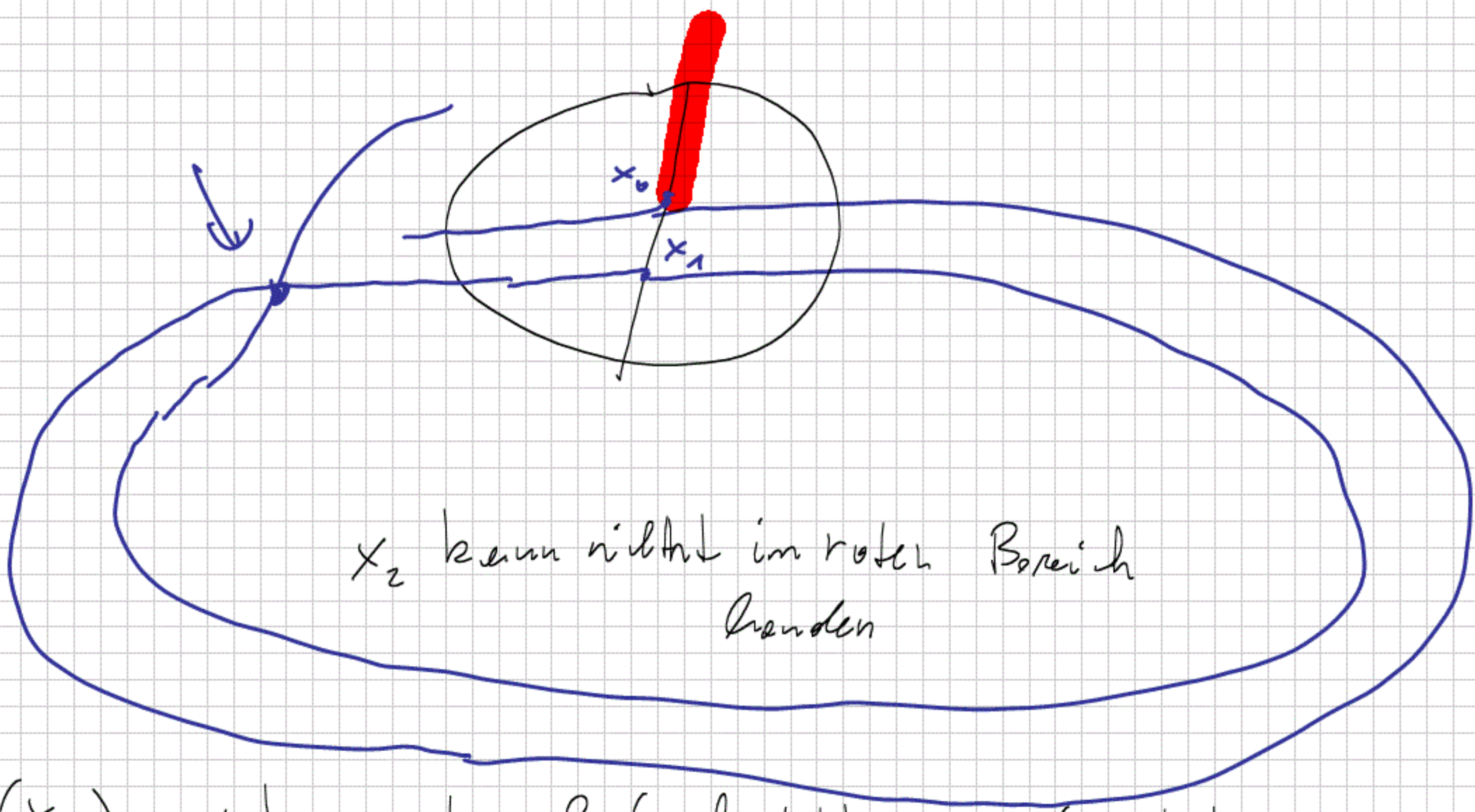
$\Phi(x_n) =: x_{n+1}$

nicht monoton.

Lemma: Die Folge $(x_n)_n$ ist monoton steigend oder fallend.

(das Bild oben ist nicht möglich.)

(a wird irgendwie orientiert)



$(x_n)_n$ ist monoton & beschränkt. $\rightarrow$ besitzt Grenzwert.

Der Grenzwert $\bar{x}$ erfüllt $\Phi(\bar{x}) = \bar{x}$, entspricht daher einem Zyklus $f > 0$ nähert sich diesem an, weil die Folge $(x_n)_n$ gegen $\bar{x}$ konvergiert. $\square$

Def: Ein kleiner Orbit ist ein Orbit (Lsg der DGL) $f: T \to \mathbb{R}^n$ der auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, und für den

$x_- := \lim_{t \to -\infty} f(t)$ und $x_+ := \lim_{t \to \infty} f(t)$ beide existieren

und x_+ kein asymptotisch stabiles Eql ist,

und x_- kein asymptotisches stabiles Eql des reversierten Systems $(F / -F)$.

Sowohl x_+ als auch x_- sind Egl., aber keine Quellen/Senken.

$x_+ = x_-$ --- homokliner Orbit

$x_+ \neq x_-$ -- heterokliner Orbit.

Poincaré-Bendixsohn, starke Version:

Sei $F : U \to \mathbb{R}^2$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig diffbares Vf

$K \subseteq U$ kompakt, $f : T \to \mathbb{R}$ ein Orbit mit maximalem Def-bereich.

Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

(1) $\exists\, t_0 > 0$ mit $f(t_0)$ liegt am Rand von K.

(2) $\exists$ Grenzzyklus, dem sich f annähert.

(3) $\lim_{t \to \infty} f(t)$ existiert (und ist ein Egl)

(4) es existiert eine geschlossene Kurve, eine Vereinigung von Equilibrien und kleinen Orbits, sodaß sich f asymptotisch an diese geschlossene Kurve annähert.