Periodische Orbits

Notiztitel 06.12.2016

Ein Zyklus / periodischer Orbit ist eine Lsg. $f: T \to \mathbb{R}^n$ für eine DG für $f: T \to \mathbb{R}^n$, $f'(t) = F(f(t))$, für die gilt: $\exists\, t_0$ mit $\forall t: f(t+t_0) = f(t)$.

(B) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \left(x(1-x^2-y^2) - y,\ y(1-x^2-y^2) + x\right)$

stabiler Zyklus. Math. Untersuchung:

Umrechnung in Polarkoordinaten

$x = r \cdot \cos\alpha, \qquad y = r \cdot \sin\alpha$

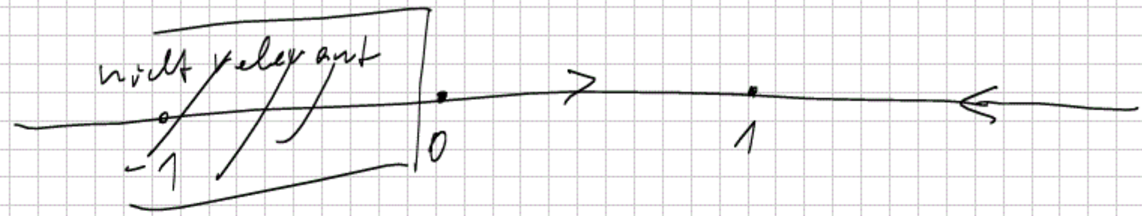
$x' = r'\cos\alpha + r \cdot (-\sin\alpha) \cdot \alpha' = r\cos\alpha(1-r^2) - r\sin\alpha$

$y' = \underbrace{r'\sin\alpha + r \cdot (\cos\alpha) \cdot \alpha' = r\sin\alpha(1-r^2) + r\cos\alpha}$

Löse nach r', α':

$$\rightsquigarrow \quad \alpha' = 1$$

$$r' = r(1 - r^2). \quad \leftarrow \text{Rf in } \mathbb{R}^1$$



Def stabiler Zyklus:

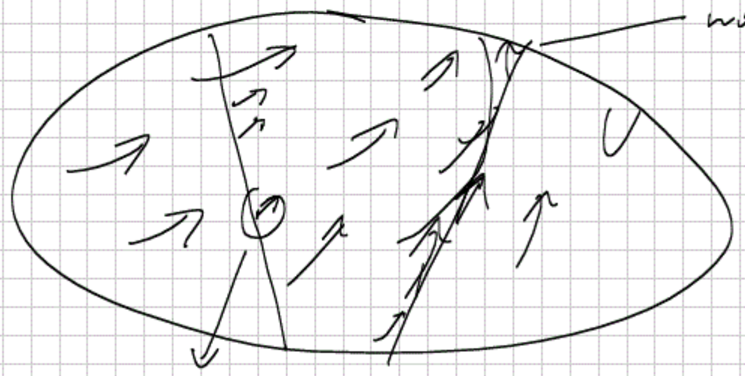
Ein Zyklus $f_z : T \to \mathbb{R}^n$ heisst stabil wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \| f_z(t) - x \| < \delta \quad \Longrightarrow$$

$$\forall t > 0 \quad \inf_{\bar{t} \in \mathbb{R}^+} \| \varphi(t, x) - f_z(\bar{t}) \| < \varepsilon.$$

asymptotisch stabil: $\lim_{t \to \infty} \inf_{\bar{t} \in \mathbb{R}^+} \| \varphi(t, x) - f_z(\bar{t}) \| = 0.$

Es sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbar.
Eine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt transversal zu F in U, wenn für jeden Punkt $v \in H \cap U$ gilt, daß $F(v)$ nicht in der Hyperebene liegt.



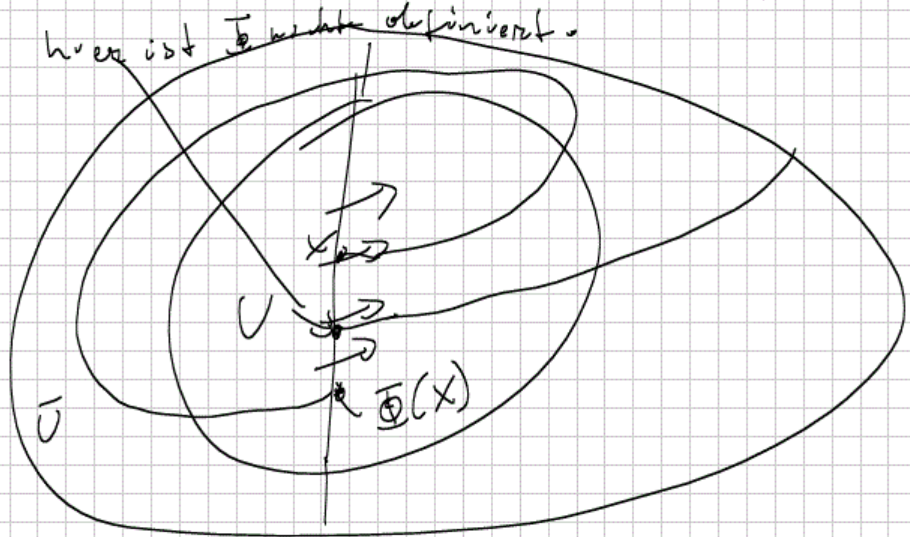
Es sei: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $F: \bar{U} \to \bar{U}$ ein Rf, H eine transversale Hyperebene.

$U \subseteq \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$

Wir definieren $\Phi: (H \cap U) \dashrightarrow (H \cap U)$ eine partiell definierte Funktion

$$(x \in H \cap U) \longmapsto \varphi(t,x)$$

/ t der kleinste positive Wert mit $\varphi(t,x) \in H$

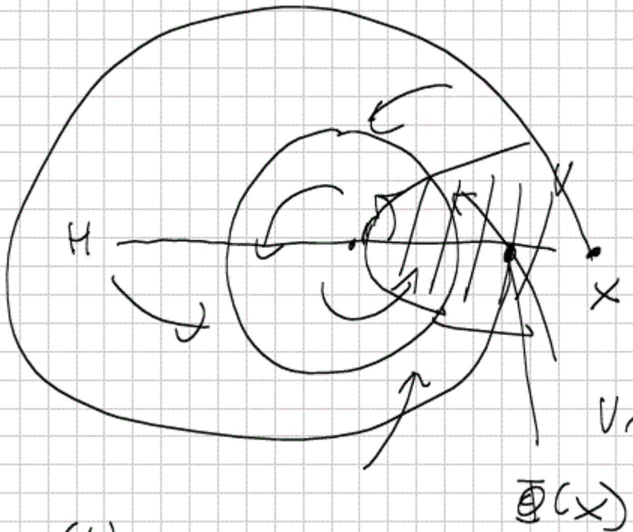


Φ heißt Poincaré-Abbildung (hängt von U und von H ab).

Satz: Φ ist definiert in einem offenen Def-Bereich und dort differenzierbar (insbesondere stetig)

BW: später.

Beispiel: Beispiel oben.



$\alpha' = 1$

$r' = r(1-r^2)$.

$V \cap H = \{(x,0) / x>0\}$

$\alpha(t) = t + c_1$

$r(t) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{c_2-2t}}}$

c_1, c_2 so wählen, daß $\alpha(t)=0$, $r(t)=x$

$c_1 = 0$, c_2 irgendein Ausdruck in x $\quad c_2(x)$

$$r(2\pi) = \frac{ax}{\sqrt{x^2+b}}$$ $a, b \in \mathbb{R}$ Konstanten

$a \sim 1$, $b \sim 535.5$ $(= e^{4\pi})$

$\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \frac{ax}{\sqrt{x^2+b}}$

Das diskrete dyn. System für $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $g(n+1) = \Phi(g(n))$

hat bei $x = 1$ einen stabilen Fp.

$\rightsquigarrow$ periodische Zyklen des kontinuierlichen Systems.

BW von Satz oben $H \cap U =: H'$

$\varphi|_{H' \times (\varepsilon, \varepsilon)} : H' \times (\varepsilon, \varepsilon) \to U$ ist stetig diffbar,

Jacobi Matrix bei $(y, 0)$ ist invertierbar

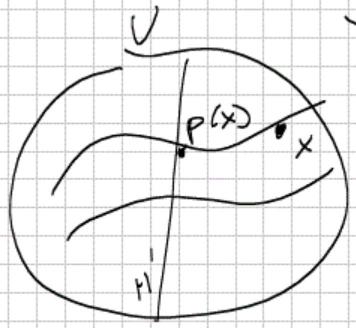
wegen der Transversalitätsbedingung.

$\varphi|_{H' \times (-\varepsilon,\varepsilon)}$ ist lokal invertierbar

$$U \to H' \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to H'$$

$U \xrightarrow{p} H'$

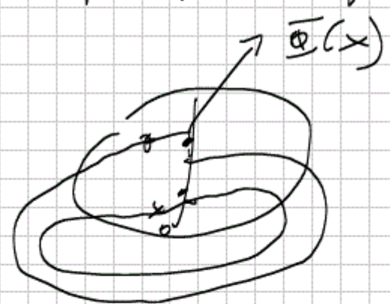
projektion von U auf H' entlang Lösungskurven



p ist stetig differbar.

Es sei $x_0 \in \mathrm{Def}(\Phi)$, $y_0 = \Phi(x_0)$. $\varphi(t_0, x_0) = y_0$ $t_0 > 0$.

$$\Phi(x) = p(\varphi(t_0, x))$$



$\square$

Satz: Es sei $F: U \to U$, stetig differenzierbar auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

a) Es sei $Z \subseteq U$ ein stabiler Zyklus. Es sei $z \in Z$. Es sei H eine Hyperebene durch z transversal zu F in einer Umgebung von z. Dann existiert eine Umgebung V von z, sodaß die Poincaré-Abbildung $\Phi: H \cap V \to H \cap V$ definiert ist, und bei z einen stabilen Fixpunkt hat.

b) Es sei H' eine Hyperebene, die transversal zu F auf einer geeigneten Menge U' ist. Wenn Φ auf $H' \cap U'$ definiert ist und Bild in $H' \cap U'$ hat, und in z' einen stabilen Fixpunkt hat, dann ist die Lösung der DG mit AW z' ein stabiler Zyklus.

