Strukturelle Stabilität

Notiztitel 05.12.2016

Satz: Es sei $F_\lambda : W \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, ein parameter-abhängiges Richtungsfeld, mit $\mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}^n$, $(\lambda, x) \mapsto F_\lambda(x)$, stetig in λ, differenzierbar in x. *

Dann existieren für jedes $\varepsilon > 0$ $\delta_1, \delta_2 > 0$, $\delta_1 < \varepsilon$, sodaß $\forall \lambda$ mit $|\lambda| < \delta_2$ die Diffgl. F_λ in U_{δ_2} von (0) genau ein Egl; dieses ist hyperbolisch vom selben Typ wie F_0.

* Wir nehmen an, daß F_0 bei (0) ein hyperbolisches Egl hat

(B) $F_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + \lambda, x_2, \ldots, x_n)$

F_0 hat bei 0 Egl, $J(F_0)|_0 = I_n$ hyperbolische Quelle.

Für $\lambda \neq 0$: Egl $(-\lambda, 0, \ldots, 0)$ $J(F_\lambda)|_{(-\lambda, \ldots, 0)} = I_n$

hyp. Quelle.

(B) $F_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \lambda, x_2, \ldots, x_n)$

Für $\lambda = 0$: $(0, \ldots, 0)$ ist einziges Egl

$J(F_\lambda)|_0 = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ nicht hyperbolisch.

$\lambda > 0$: kein Egl

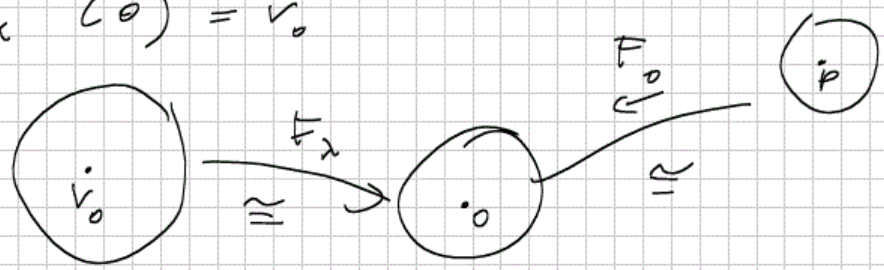
$\lambda < 0$: 2 Egl $(-\sqrt{|\lambda|}, 0, \ldots, 0)$, $(\sqrt{|\lambda|}, 0, \ldots, 0)$

BW des Satzes:

für kleine λ ist F_λ in der Nähe von Egl lokal invertierbar, da die $J(F_\lambda)|_{(0)}$ EW abseits der imaginären Achse hat (y.Ct für $\lambda = 0$, und da EW stetig in Einträgen der Matrix, auch für kleine λ).

Für $|\lambda| < \delta_2$ (mit kleinem δ_2) existiert F_λ^{-1} in der Nähe von (0).

Egl von F_λ ist $F_\lambda^{-1}(0) = v_0$



Die Anzahl der Eigenwerte mit positivem/negativem Realteil bleibt für kleine λ gleich.
Der Typ hängt nur von dieser Anzahl ab. $\square$

(B) Wenn ein stabiles Ggl nicht hyperbolisch ist, ist es nicht strukturell stabil:

$$F_\lambda(x_1,\dots,x_n) = (-x_1^3+\lambda, -x_2, -x_3, \dots, -x_n)$$

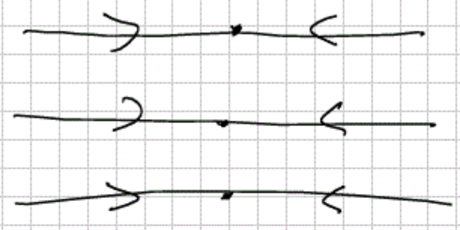
$\lambda = 0$: $\quad (x_1,\dots,x_n) \mapsto (-x_1^3, -x_2, \dots, -x_n)$

$x_1' = -x_1^3$

$x_2' = -x_2$

$\vdots$

$x_n' = -x_n$



$(0,\dots,0)$ ist stabiles Ggl.

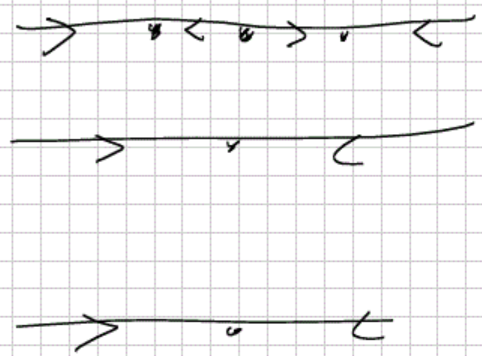
Für $\lambda > 0$ bekommen wir 3 Ggl $x_1 = 0$, $x_1 = \sqrt[3]{\lambda}$, $x_1 = -\sqrt[3]{\lambda}$.

$$x_1' = -x_1^3 + \lambda$$

$$x_2' = -x_2$$

$$\vdots$$

$$x_n' = -x_n$$



keine strukturelle Stabilität.

Diskrete Systeme mit Zyklen.

$F: U \to U$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, F stetig

$f: \mathbb{N} \to U$, $f(n+1) = F(f(n))$ $\forall n$, $f(0)$ Startwert.

Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Ein k-Zyklus ist ein Fixpunkt der Funktion $F^k : x \mapsto \underbrace{F(F(}_{k\text{ mal}}\ldots(F(x))\ldots)$, der kein Fixpunkt von F^l für $l<k$ ist.

k-Zyklus hat Periode k, $2k$, $3k$, …

Für die Folge $(f(n))_n$ heißt das:
$f(0) = x_1, \ldots, f(k) = x_k$, $f(k+1) = x_0$, $f(k+2) = x_1$ etc

Ein k-Zyklus ist stabil, wenn $(JF^k)|_{x_1}$ Eigenwerte mit Betrag kleiner 1 hat.

Formel für JF^k bei einem k-Zyklus:

Sei $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ein k-Zyklus.

$$J F^k\Big|_{x_1} = J(F\circ F\circ\dots\circ F)\Big|_{x_1} = J(F)\Big|_{\underbrace{F\circ F\dots\circ F}_{k-1}(x_1)} \cdot J(F)\Big|_{\underbrace{F\circ\dots F}_{k-2}(x_1)} \cdot$$

$$= J(F)\Big|_{x_k} \cdot J(F)\Big|_{x_{k-1}} \cdots \quad J(F)\Big|_{x_1}$$

Für $n=1$ (stetige Fkt $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Prop: Wenn F einen k-Zyklus hat für irgendein $k>0$, dann besitzt F einen Fixpunkt (1-Zyklus).

BW: Angenommen F hat keinen Fixpunkt.

$y(x) := F(x) - x$ hat kein Nullstellen, entweder >0 od <0 für alle x.

Annahme $y(x) > 0 \ \forall x.$ $F(x) > x$

Folge $(x_0, f(x_0), f(f(x_0)) \dots)$ ist streng monoton steigend

→ keine Zyklen.

Satz: Wenn F einen 3-Zyklus besitzt, dann hat F Zyklen von jeder Ordnung.

BW:

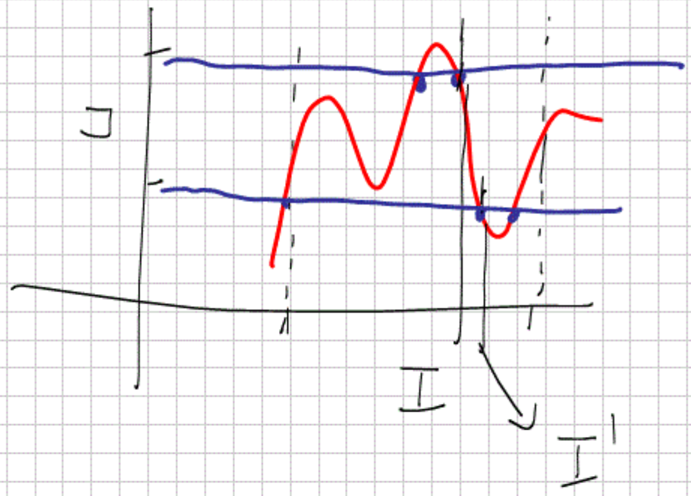
Für I, J abgeschlossene beschränkte Intervalle definieren wir

$I \to J$ als $f(I) \supseteq J$.

$I \xrightarrow{\cdot} J$ als $f(I) = J$

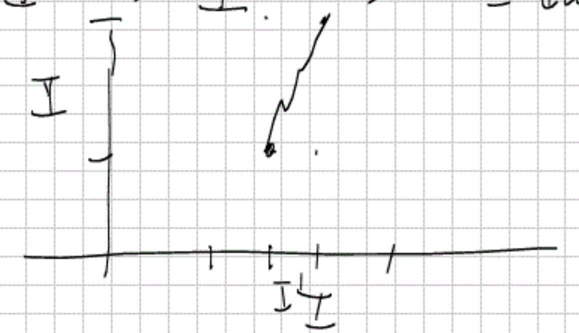
Lemma 1: $I \to J \Rightarrow \exists I' \subseteq I$ sodaß $I' \xrightarrow{\cdot} J$

BW C1.



$I' \to J$

Lemma 2: $I \to I \Rightarrow I$ enthält Fixpunkt



$\exists\, I' \subseteq I$ mit $F(I') \to I$.

$I = [a, b]$

$F(x_0) = a$ mit $x_0 \in I' \subseteq I$

$F(y_0) = b$ mit $y_0 \in I$

$F|_{I'}$ hat Bild I. $x \mapsto F(x) - x$ hat für $x = x_0$ positiven Wert

und für $x = y_0$ negativen Wert

MWS $F(x) = x$ für irgendein $x \in I'$.

Lemma 3: Angenommen $I_1, \ldots, I_k$ seien abg. Intervalle sodaß

$$I_1 \to I_2 \to I_3 \to \ldots \to I_{k-1} \to I_k \to I_1$$

Dann existiert ein Zyklus mit Periode $l \mid k$,

$x_1, \ldots, x_k$, $x_{k+1} = x_1$, sodaß $F(x_{i+1}) = x_i$ $\forall i$,

$x_i \in I_i$.

BW von L3: nach L1 gibt es J_k mit $J_k \to I_1$, $J_k \subseteq I_k$

für $I_{k-1}, \dots, I_1$ gilt das gleiche:

$J_1 \to J_2 \to J_3 \to \dots \to J_k \to I_1$, $J_i \subseteq I_i$

Nach Lemma 2 existiert ein Fp von F^k in J_1 $\quad x_1;\ x_2 \in J_2, \dots x_k \in J_k$

$x_{k+1} = x_1$

BW des Satzes:

Angenommen, es existiert ein 3-Zyklus $x_1, x_2 = F(x_1), x_3 = F(x_2)$,

$x_1 = F(x_3)$

Nehmen an: $X_1 < X_2 < X_3$

$I_1 := [x_1, x_2]$, $\qquad I_2 := [x_2, x_3]$

$F(x_1) = x_2,\ F(x_2) = x_3 \Rightarrow I_1 \to I_2$

$F(x_2) = x_3,\ F(x_3) = x_1 \Rightarrow I_2 \to I_1 \cup I_2 \Rightarrow I_2 \to I_1,\ I_2 \to I_2$

$$\underbrace{I_1 \to I_2 \to I_2 \to I_2 \to \;\dots\; \to I_2}_{k \text{ mal}} \to I_1$$

Nach Lemma 3 gibt es einen l-Zyklus mit $l \mid k$, sodass $y_1 \in I_1, y_2, \dots, y_k \in I_2$.

y_1 liegt nicht am Rand: $y_1 = x_1$, $y_1 = x_2$ $f(x_1) = x_2 \notin I_1$

$\to y_1 \in I_1^\circ = (x_1, x_2)$ daher ist $y_1 \neq y_2, \dots, y_k$

$\leadsto k = l$, k-Zyklus. ☐

Satz von Sharkovsky: Es gibt eine lineare Ordnung auf $\mathbb{N}_{>0}$:

$1 \lhd 2 \lhd 4 \lhd 8 \dots \quad . \lhd 10 \lhd 5 \quad . \lhd 12 \lhd 6 \lhd 3$

Falls $m \lhd n$ und F einen n-Zyklus besitzt, dann hat F auch einen m-Zyklus.

⋮

Wie verändert sich das periodische Verhalten unter der Änderung von Parametern:

(B) $F_\lambda(x) := \lambda \cdot x(1-x)$, $\lambda > 1$.

Fixpunkte: $\lambda x(1-x) = x$ $\quad x=0$ ist Fp

$$\lambda(1-x) = 1$$
$$\lambda - \lambda x = 1$$
$$\lambda - 1 = \lambda x, \quad x = \frac{\lambda-1}{\lambda} = \bar{x}_2 \text{ ist Fp.}$$

Stabilität: $F_\lambda'(x) = \lambda - 2\lambda x$, $F_\lambda'(0) = \lambda \Rightarrow$ instabil.

$$F_\lambda'(\bar{x}_2) = \lambda - 2\lambda \frac{\lambda-1}{\lambda} = 2-\lambda.$$

Für $\lambda \in [1,3]$ ist $\bar{x}_2$ stabiler Fixpunkt.

Für $\lambda > 3$ wird der Fp instabil

$$F^2(x) = \lambda\,(F_\lambda(x))(1-F_\lambda(x)) = \lambda x(1-x)(1-\lambda x(1-x))$$

hat bis zu 4 Fixpunkte

$F^2(x) = x$: $\quad \lambda x(1-x)(1-\lambda x(1-x)) = x \qquad x=0$ ist Lsg

falls $x \neq 0$: $\quad \lambda(1-x)(1-\lambda x(1-x)) = 1 \qquad x = \bar{x}_2 = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ ist Lsg.

zwei weitere Lösungen $\bar{y}_1, \bar{y}_2$.

(nur für $\lambda > 3$),

Um herauszufinden, ob (y_1, y_2) stabiler 2-Zyklus ist, setzen wir in F' ein

$$F_\lambda^{2\,\prime}(y_1) = F_\lambda'(y_1)\cdot F_\lambda'(y_2) = -\lambda^2+2\lambda+4$$

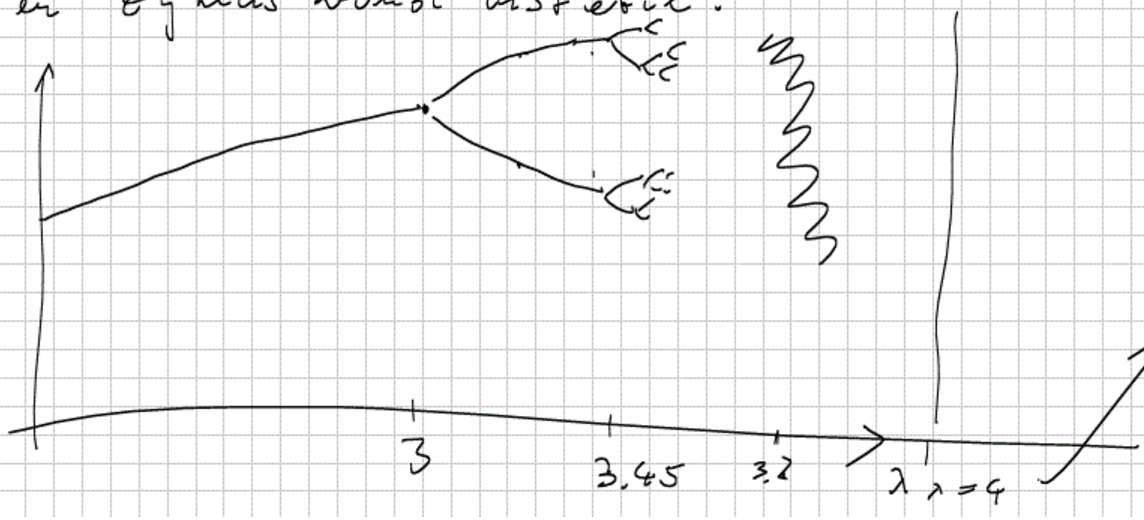
Für $\lambda = 3$, Wert ist -1, danach sinkend

Für $\lambda = 3+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ε klein ist $|-\lambda^2+2\lambda+4| < 1$

⇝ stabiler 2-Zyklus.

Bei $\lambda = 3,45$ wird $-\lambda^2+2\lambda+4 = -1$ ⇝

2er-Zyklus wird instabil.



2^n-Zyklen

⇝ k Zyklen für alle k.