Lokale Äquivalenz

Notiztitel 22.11.2016

Es seien $U, \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, $F: U \to \mathbb{R}^n$, $\bar{F}: \bar{U} \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar, $m, n \in \mathbb{N}$

$\varphi: D \subseteq T \times U \to U$ bzw. $\bar{\varphi}: \bar{D} \subseteq T \times \bar{U} \to \bar{U}$ seien die Flüsse der Richtungsfelder F bzw. $\bar{F}$.

Eine Abbildung des dyn. Systems gegeben durch obigen Daten ist eine stetige Funktion $f: \bar{U} \to U$, sodaß $\rho: \bar{D} \to T$ existiert, mit

$$f(\bar{\varphi}(t, x)) = \varphi(\rho(t,x), f(x)) \quad \forall (t,x) \in \bar{D}$$

(insbesondere ist $(\varphi(t,x), f(x)) \in D$.

Darstellung durch ein "Kommutatives Diagramm":

$$\begin{tikzcd}
T \times \bar{U} \arrow[r, "(\varphi, f)"] \arrow[d, "\bar{\varphi}"] & T \times U \arrow[d, "\varphi"] \\
\bar{U} \arrow[r, "f"] & U
\end{tikzcd}$$

Spezialfälle: $m = 1$ $\quad \bar{\varphi}(t,x) = x + t$ (konstantes Richtungsfeld $F(x)=1$)

$$f(x+t) = \varphi(\rho(t,x), x) \quad \forall x, t \in D$$

d.h. $t \mapsto f(x+t)$ ist Lösungskurve, umparametrisiert durch ρ.

$n=1$: $m=2$ Lotka-Volterra-System:

$F:(x,y)\longmapsto (x(1-y),\ y(x-1))$

DG für $f: t \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (X(t), Y(t))$:

$$X'(t) = X(t)\cdot(1-Y(t))$$
$$Y'(t) = Y(t)\,(X(t)-1)$$

Lotka-Volterra-Modell.

$X(t)$ ... population einer Beute-Spezies zum Zeitpunkt t

$Y(t)$ — " — Räuber-Spezies

$U = \{(x,y) \mid x,y>0\}$.

Equilibrium: 1 Eql $(x_0,y_0) = (1,1)$

Es sei $f: U \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \ln x - x + \ln y - y$

Behauptung: f ist eine Abbildung des dyn. Systems LV auf das konstante dyn. System in einer Variable

$\varphi(t, x) = x \qquad$ (Richtungsfeld $F(x) = 0$)

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$\underline{f(\varphi(t,(x,y))} = \varphi(p(t,(x,y)), f(x,y)) = \underline{f(x,y)}$$

dh f ist konstant auf jeder Lösungskurve.

BW der Behauptung:

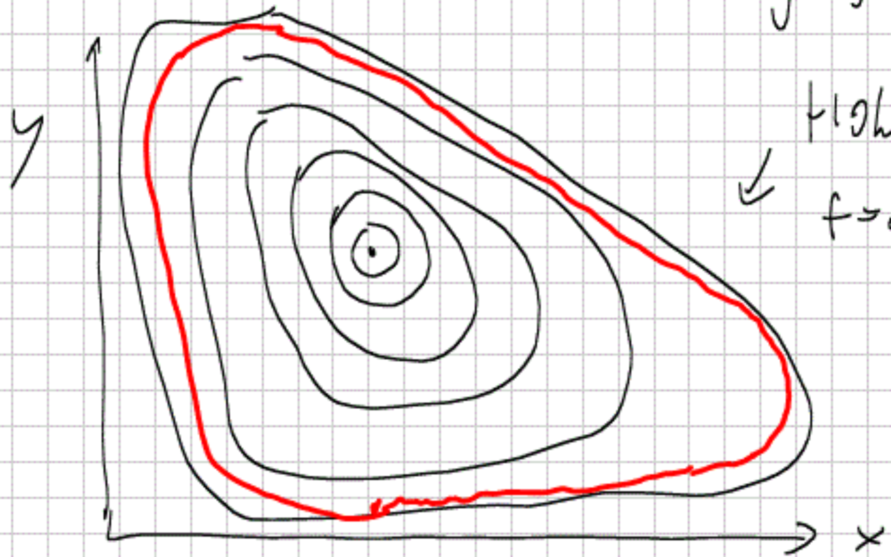
$$\frac{d}{dt} f(X(t), Y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), Y(t)) \cdot X'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(X(t), Y(t)) \cdot Y'(t)$$

$$= \left(\frac{1}{X(t)} - 1\right) X(t)\left(1 - Y(t)\right) + \left(\frac{1}{Y(t)} - 1\right) Y(t)\left(X(t) - 1\right)$$

$$= \left(1 - X(t)\right)\left(1 - Y(t)\right) + \left(1 - Y(t)\right)\left(X(t) - 1\right)$$

$$= \left(1 - Y(t)\right)\left(1 - X(t) + X(t) - 1\right) = 0 \qquad \square$$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist entlang jeder Lösungskurve konstant.



Höhenlinien
$f = \text{constant}$

$(1,1)$ ist Maximum,
für $x \to 0$ und $x \to \infty$
und $y \to 0$, und $y \to \infty$
geht $f(x,y)$ gegen $-\infty$

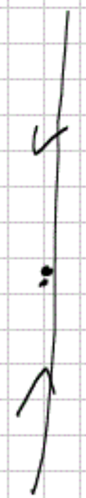
Lösungskurven sind geschlossene Kurven, Verhalten periodisch.

(1, 1) ist stabiler, aber nicht asymptotisch stabiler Gleichgewichtspkt.

Abbildungen $f : U \to \mathbb{R}$ in nicht-konstante dyn. Systeme.

System in $\mathbb{R}^1$: $\varphi(t, x) = e^{-t} \cdot x \qquad F(x) = -x$

hat bei 0 einen asymptotisch stabilen Egl.



Eine Abb $f : U \to \mathbb{R}$ in diesem dyn System nennt man Ljapunov-Funktion.

Eigenschaften: Der Wert des Absolutbetrags der Funktion sinkt entlang jeder Lösungskurve.

B: $F: (x,y) \mapsto (-y-x^3, x-y^3)$

DG: $X'(t) = -Y(t) - X(t)^3$

$Y'(t) = X(t) - Y(t)^3$

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto x^2+y^2$

Der Wert von L sinkt entlang jeder Lösungskurve.

BW:

$$\frac{d}{dt} L(X(t),Y(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(X(t),Y(t)) \cdot X'(t) + \frac{\partial L}{\partial y}(X(t),Y(t))\, Y'(t)$$

$$= 2X(t)\cdot(-Y(t)-X(t)^3) + 2Y(t)(X(t)-Y(t)^3)$$

$$= -2X(t)^4 - 2Y(t)^4 < 0 \text{ falls } (X(t),Y(t)) \neq (0,0)$$

$\rightsquigarrow$ außerhalb des Egl $(x,y) = (0,0)$ sinkt der Wert von $L(x,y)$ nach Einsetzen in eine Lösung.

Folgerung aus der Existenz der Ljapunov-Funktion.

(1) im gesamten Bereich, in dem die obigen Bedingungen erfüllt sind, gibt es nur ein Egl.

(2) Das Egl ist asymptotisch stabil.

(3) es lassen sich Bereiche $W \subseteq U$ finden, sodaß jede Lösung mit Startwert in W immer in W bleibt

$\forall t > 0 : \quad u \in W \Rightarrow \varphi(t,u) \subseteq W$

$W = \{ (x,y) \mid |L(x,y)| \leq c \}$

Definition der lokalen Equivalenz:

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $U, \bar{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\varphi, \bar{\varphi}$ die Flüsse von dynamischen Systemen $\varphi : D \subseteq T \times U \to U$, $\bar{\varphi} : \bar{D} \subseteq T \times \bar{U} \to \bar{U}$, $D, \bar{D}$ Definitionsbereiche der Flüße.

Es seien $p \in U$, $\bar{p} \in \bar{U}$.

Die dyn. Systeme dazu sind bei $p / \bar{p}$ lokal equivalent, wenn $V \subseteq U$, $\bar{V} \subseteq \bar{U}$ Umgebungen von $p, \bar{p}$ existieren, und Abbildungen

$$f : V \to \bar{V}, \qquad g : \bar{V} \to V, \quad g = f^{-1}$$

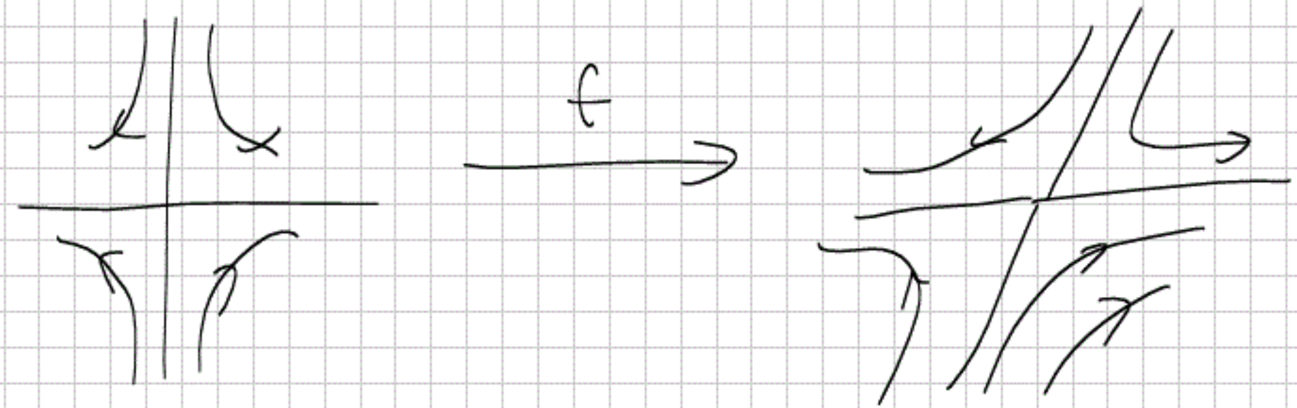
die beide Abbildungen der dynamischen Systeme eingeschränkt auf V bzw. $\bar{V}$ sind.

Beispiele: $V = \bar{V} = \mathbb{R}^n$, dyn. Systemen geg. durch $F: v \mapsto Av$, $\bar{F}: Bv$, $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

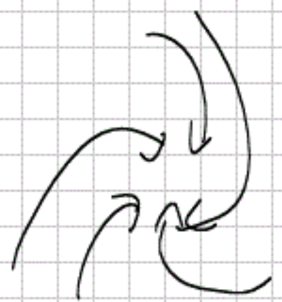
$$\varphi_A : (t, x) \mapsto e^{At} x$$

$$\varphi_B : (t, y) \mapsto e^{Bt} \cdot y$$

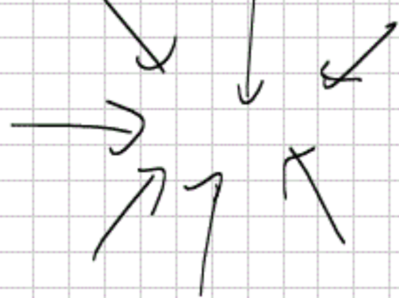
Wenn A, B ähnlich sind: $B = T^{-1} A T$, dann ist $f: v \mapsto Tv$ eine Equivalenz der beiden Systeme.



Nicht-Beispiel: Wenn System 1 bei 0 eine Quelle hat und System 2 eine Senke, dann sind die Systeme nicht lokal äquivalent



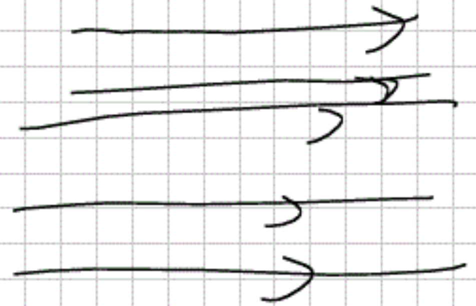
lokal equivalenten



- Punkte, die keine Gleichgewichtspunkte sind.

konstantes Rf, $\bar{F}(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. $\forall v \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{\varphi} : \left(t, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} v_1 + t \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$



Satz: Es sei $F: U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig diffbares Richtungsfeld. Es sei $p \in U$ mit $F(p) \neq 0$. Dann ist F bei p lokal equivalent zum konstanten Richtungsfeld.

BW. OBdA $F(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (der ~~erste~~ letzte Einheitsvektor)

$H \subseteq U$ sei die Hyperebene definiert durch $v_1 = 0$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Big/ \ v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in U \right\}.$$

$$f: \underbrace{H \times \mathbb{R}}_{\subseteq \mathbb{R}^n} \longrightarrow U, \quad f(v, \lambda) := \varphi(\lambda, v)$$

Behauptung: f ist eine Abbildung des konstanten Richtungsfelds in das Richtungsfeld F.

Zz. $f(\bar{\varphi}(t, x)) = \varphi(p(t,x), f(x))$.

[es existiert so ein $p: T \times U \to T$.]

Wählen $p(t,x) := t$

Zz. $f(\bar{\varphi}(t,x)) = \varphi(t, f(x)) \quad \forall x \in H \times \mathbb{R}$.

$x = (v, \lambda)$, $u \in H$ $\qquad \bar{\varphi}(t, (v, \lambda)) = (v, t+\lambda)$

LS $\quad f(\underset{\shortparallel}{v}, t+\lambda) = \varphi(t, \varphi(\underset{\shortparallel}{\lambda}, u))$ RS

$\varphi(t+\lambda, u) \overset{?}{=} \varphi(t, \varphi(\lambda, u))$ $\qquad$ stimmt.

Begründung: erst λ Sekunden, dann σ Sekunden warten ergibt das gleiche wie $(t+\lambda)$ Sekunden warten.

Noch zu zeigen: $f: H \times \mathbb{R} \to U$ ist lokal bijektiv bei p.

Jacobi-Matrix von f.

Jacobi-Matrix bei $(v, 0)$ des Flußes φ: $\left(\begin{array}{c|c} I & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} \end{array} \right)$

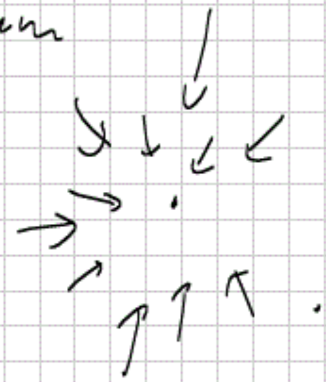
Einschränken auf H bedeutet: n-te Spalte raus $\rightsquigarrow I_n$

Jacobi-Matrix von f bei $(p, 0)$ invertierbar

$\rightsquigarrow$ lokaler Isomorphismus $\square$

Lokale Equivalenz von Gleichgewichtspunkten:

Satz: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $F: U \to U$ ein diffbares R-feld, $p \in U$ ein Egl, sodaß $JF(p)$ nur Eigenwerte mit negativem Realteil besitzt.
Dann ist F bei p lokal equivalent zum linearen Richtungsfeld $v \mapsto -v$



Insbesondere ist p ein asymptotisch stabiles Egl.

BW: OBdA: $p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Lemma:</u> Es sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung.

Angenommen die Eigenwerte von A haben alle negativen Realteil.

Dann existiert ein Skalarprodukt $\langle\, , \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, positiv definit, sodaß $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\} : \langle v, Av \rangle < 0$.

BW: später. (ähnlich wie Übung).

$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \langle v, v \rangle$, $\langle\, , \rangle$ so gewählt, daß $\langle v, (JF)_{(0)}(v) \rangle < 0 \quad \forall v \neq 0$.

Behauptung: $\exists \varepsilon > 0$ sodaß für jede Lösungskurve mit Startwert v, $\|v\| < \varepsilon$ gilt: Wert von $L(f(t))$ sinkt.

$\rightsquigarrow$ 0 ist asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Abstand zu 0 verringert sich entlang jeder Lösungskurve (mit Startwert $\|v\| < \varepsilon$).

BW der Behauptung: Sei $f: I \to U$ eine Lösung

$$\frac{d}{dt} L(f(t)) = \frac{d}{dt} \langle f(t), f(t) \rangle =$$

$$2 \cdot \langle f(t), f'(t) \rangle = 2 \langle f(t), F(f(t)) \rangle$$

$$= 2 \langle f(t), \cancel{F(0)} + L \cdot f(t) + o(\|f(t)\|) \rangle$$

$$= 2 \langle f(t), L \cdot f(t) \rangle + o(f(t) \cdot \|f(t)\|)$$

$$= c \cdot o(\|f(t)\|^2) + o(\|f(t)\|^2) < 0$$

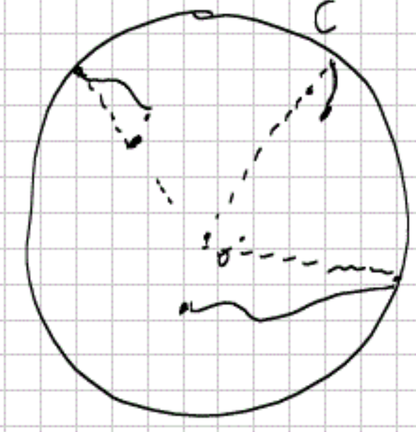
mit $c < 0$

$C \subseteq V$, $\quad C = \{v \mid \|v\| = \varepsilon\}$

$B \subseteq V$, $\quad B = \{v \mid \|v\| \leq \varepsilon\}$

$B = \{\varepsilon \cdot r \cdot v \mid \|v\| = 1,\ r \in (0,1]\} \uplus \{0\}$;

$f: B \to B$ sei definiert durch



$f(\varepsilon \cdot r \cdot v) = \varphi(|\ln(r)|, \varepsilon v)$

$f(0) = 0$

f stetig auf $B \setminus \{0\}$,

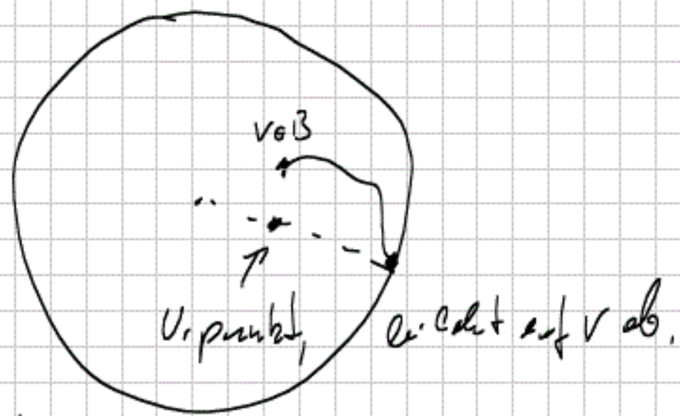
f ist auch stetig bei 0 da 0 asymptotisch stabiles Egl.

f ist eine Abb. des dyn. Systems $v \mapsto -v$
auf das dyn System F.
Lösungskurven von $(v \mapsto -v)$, Strahlen zu 0,
werden abgebildet auf Lösungen von F.

f injektiv: Flußlinien kreuzen einander nicht,
eingeschränkt auf Lösungskurve ist bn injektiv.

f surjektiv:

Löse AWP mit Startwert v,
Lösungskurve schneidet C
für ein $t_0 < 0$
f wird angewandt auf $\varphi(t_0, v)$.



Fluß ist differenzierbar, Ableitung ist invertierbar

$\rightsquigarrow$ Umkehrabbildung ist wieder stetig

$\rightsquigarrow$ (f, f^{-1}) gewährleisten die lokale Equivalenz. $\square$

Offene Fragen: Was passiert, wenn $JF(p)$ Eigenwerte mit Realteil 0 oder >0 haben?

Satz (Hartmann/Grobmann): Wenn Realteile alle ungleich 0 sind, ist das dyn. System lokal equivalent zu einem linearen dyn. System $v \mapsto A \cdot v$, und zwar mit $A = JF(p)$.